8 класс

ГЕОМЕТРИЯ

ФГОС

УМК

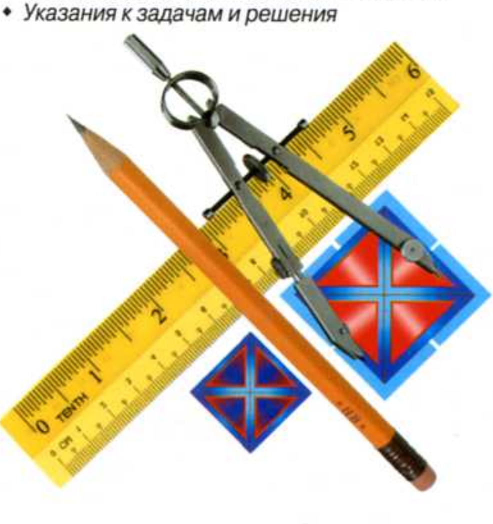
Т. М. Мищенко

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

К учебнику Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы»

- *Методы решения задач*
- *Тематическое планирование*
- *Планы уроков*
- *Объяснение сложных тем*
- *Контрольные и самостоятельные работы*
- *Указания к задачам и решения*

8 класс



ЭКЗАМЕН

Учебно-методический комплект

Т. М. Мищенко

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

К учебнику Л. С. Атанасяна и др.
«Геометрия. 7–9 классы» (М. : Просвещение)

8 класс

Методы решения задач
Тематическое планирование
Планы уроков
Объяснение сложных тем
Контрольные
и самостоятельные работы
Указания к задачам и решения

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2016

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
М71

Мищенко Т. М.

М71 Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 8 класс: к учебнику Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т. М. Мищенко. — М. : Издательство «Экзамен», 2016. — 174, [2] с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-09932-1

Данное учебное пособие полностью соответствует федеральному государственному образовательному стандарту (второго поколения).

Предлагаемые методические рекомендации призваны помочь учителю, работающему по учебнику Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9». Эти дидактические материалы и методические рекомендации выполнены в соответствии с ФГОС.

Использование рекомендаций методического пособия в учебном процессе позволит осуществить: во-первых, достижение каждым учеником уровня обязательной геометрической подготовки, и, во-вторых, сформировать у учащихся умение применять полученные знания как в стандартных ситуациях, так и в ситуациях, несколько отличных от обязательного уровня.

В пособии по *каждой главе* дается общая характеристика ее содержания, места и роли в курсе, методических особенностей ее изучения; контрольная работа.

По *каждому параграфу* дается комментарий для учителя, включающий общую характеристику содержания параграфа, требования к знаниям и умениям учащихся; методические рекомендации к изучению материала для учителя; примерное планирование изучения материала параграфа; указания к решению задач из учебника; вопросы для повторения теоретического материала параграфа; дополнительные задачи.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Подписано в печать 24.12.2015. Формат 60х90/16. Гарнитура «Школьная».
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 7,22. Усл. печ. л. 11. Тираж 10 000 экз. Заказ №1.

ISBN 978-5-377-09932-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга предназначена учителю, работающему в восьмых классах по учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9» (М., Просвещение, 2013). В книге даны рекомендации, разработанные в соответствии с концепцией построения учебника и позволяющие учителю сориентироваться как в методических особенностях изложения учебного материала, так и в требованиях, предъявляемых ФГОС к геометрической подготовке учащихся.

Использование рекомендаций методического пособия в учебном процессе позволит: во-первых, осуществить достижение каждым учеником уровня обязательной геометрической подготовки и, во-вторых, сформировать у школьников умение применять полученные знания как в стандартных ситуациях, так и в ситуациях, несколько отличных от обязательного уровня.

Основными особенностями авторского подхода к изложению учебного материала являются: опора на наглядность, снижение уровня строгости логических рассуждений при обосновании утверждений, очевидных с точки зрения учащихся.

Такой подход определяет в седьмом классе метод работы учителя с классом как *обучение по образцам*, а в восьмом классе позволяет часть теорем рекомендовать для самостоятельного изучения учащимися с последующим обсуждением. При этом на таких уроках при оценке ответов учащихся важнее оценивать не столько правильность ответа, сколько стремление обосновывать и доказывать учеником высказанное им утверждение. Такой подход будет способствовать развитию культуры мышления. Отсюда следует, что большую часть уроков нужно проводить в форме бесед, во время которых обсуждать доказанные и доказываемые теоремы и решения задач.

В учебнике задачам отводится чрезвычайно важная роль. Некоторые из них содержат интересные геометрические факты и служат дополнением к теоретическому материалу учебного пособия. Часть задач этой группы полезно рассмотреть как теоремы; если их доказательство сложно, то оно должно быть изложено учителем. Кроме того, при решении других задач вполне уместны ссылки на эти утверждения. Другие задачи в определенном смысле можно считать задачами уровня обязательной математической подготовки, а умение решать их — обязательным для всех учащихся. Третьи являются задачами повышенного уровня.

В систему задач учебника входит значительное число задач, которые в разделе «Методические рекомендации к изучению материала» рекомендуется решать устно. Это совершенно не означает, что они просты. Это, как правило, задачи, в ходе решения которых необходимо привлекать как можно больше учащихся для поиска решения.

Определенную сложность для учителя представляет необходимость взвешенного сочетания при решении задач письменных и устных форм работы. Письменные формы работы являются важнейшим видом деятельности, формирующим устойчивые навыки в проведении логических рассуждений при решении задач. Форма записи условия задачи, разумные, естественные и исторически сложившиеся сокращения и обозначения при вычислениях и доказательствах дисциплинируют мышление. Вместе с тем заметим, что увлечение письменными видами работы на уроках и дома приводит к большим и не всегда оправданным затратам времени и тормозит развитие устной геометрической речи.

Планирование учебного материала рассчитано на ***пять*** часов математики в неделю, из которых два часа отводятся на изучение геометрии.

Основное назначение данной книги — помочь учителю в организации учебной деятельности школьников. В ней даются:

по каждой главе — общая характеристика ее содержания, места и роли в курсе, контрольная работа;

по каждому параграфу — комментарий для учителя, включающий, если необходимо, общую характеристику содержания и требования к знаниям и умениям учащихся; методические рекомендации к изучению материала с разбивкой по отдельным вопросам; примерное планирование изучения материала параграфа; указания к решению задач из учебного пособия; дополнительные задачи.

Рубрика «**Методические рекомендации к изучению материала**». ***Весь материал данного раздела полностью адресован учителю и только учителю.*** Здесь учитель получает некоторую оценочную рекомендацию к изучению материала, в которой расставлены акценты и указаны приоритеты. Все методические рекомендации должны быть адаптированы к конкретному классу, уровню подготовки учащихся. Такая адаптация может привести к уменьшению числа решаемых задач, увеличению числа часов, отводимых на изучение той или иной темы за счет часов, выделенных на решение задач или резерва.

В рекомендациях к изложению теоретического материала рассматриваются возможные методические подходы к изложению материала на уроке, дается примерная система упражнений для закрепления теоретического материала и контроля за его усвоением. Для некоторых наиболее сложных теорем приводятся примерные планы проведения их доказательств. Новый материал будет лучше усваиваться учащимися, если они под руководством учителя сделают краткие записи в тетрадях. В большинстве случаев достаточно записать план доказательства или узловые моменты доказательства. Целесообразно сопроводить и доказательства теорем, и определения, и решения задач чертежами.

Учитывая наличие рабочих тетрадей к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9», в методических рекомендациях указываются места их применения и даются рекомендации по их использованию[1].

Привлечение наглядных представлений не только не противоречит основному принципу построения курса, но является его методической особенностью.

Рубрика **«Примерное планирование изучения материала»**. Задачи к каждому уроку выделены по принципу их соответствия содержанию изучаемого на данном уроке теоретического материала. Поэтому кроме задач, указанных в разделе «Методические рекомендации к изучению материала», включены задачи, которые лучше решить с классом не в процессе объяснения нового материала, а в процессе его закрепления. Одна из задач этапа первичного закрепления в процессе изучения темы состоит в том, чтобы научить школьников решать новые задачи, применяя только что полученные сведения. Как правило, именно эти задачи дублируются задачами домашнего задания.

При распределении учебного времени на изучение каждой темы последний урок отводится на систематизацию и обобщение знаний по данной теме, один урок — на контрольную работу и заключительный урок — для разбора ошибок контрольной работы и подведения итогов. На уроках систематизации и обобщения знаний рекомендуется решить те задачи, которые не были решены в процессе изучения темы, и провести подготовку к контрольной работе.

[1] Рабочая тетрадь по геометрии: К учебнику Л.С. Атанасяна и др.: 8 класс / Т.М. Мищенко. — М.: Издательство Экзамен, 2016.

В рубрике **«Указания к задачам»** приведены схемы решения основных (опорных) задач и решения наиболее трудных задач.

«Дополнительные задачи» образуют некоторый резерв для учителя. Одни из них должны помочь при закреплении нового материала, другие — подвести учащихся к решению задач из учебника, третьи могут быть использованы для индивидуальных заданий.

Целью **самостоятельных и контрольных работ** является проверка усвоения учащимися основного материала изученной темы (иногда части темы). При этом результаты проверки самостоятельных и контрольных работ позволяют зафиксировать не только достижение или недостижение учащимися уровня обязательной подготовки, но также достижение повышенного уровня обученности. В работах проверяются следующие умения: понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой; делать чертежи, сопровождающие условие задачи, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

Значительную помощь учителю в организации учебного процесса могут оказать рабочие тетради издательства «Экзамен»: «Геометрия — 7», «Геометрия — 8», «Геометрия — 9» (Т.М. Мищенко).

В процессе работы над книгой была использована следующая литература:

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия: учеб. для 7–9 классов. — М.: Просвещение, 2013

2. Погорелов А.В. Геометрия: учеб. для 7–9 классов. — М.: Просвещение, 2013.

3. Шарыгин И.Ф. Геометрия: учеб. для 7–9 кл. — М.: Дрофа, 2013.

4. Примерные программы основного общего образования. Стандарты второго поколения. Математика. — М.: Просвещение.

5. Мищенко Т.М. Геометрия. Планируемые результаты. Система заданий. 7–9 классы: пособие для учителей общеобразовательных организаций / под ред. Г.С. Ковалевой, О.Б. Логиновой. — М.: Просвещение, 2014.

6. Кузнецова Л.В. и др. Планируемые результаты. Система заданий. Математика 5–6 классы. Алгебра. 7–9 классы: пособие для учителей общеобразовательных организаций / под ред. Г.С. Ковалевой, О.Б. Логиновой. — М.: Просвещение, 2013.

ГЛАВА V. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ (12 ч)

Особенностью данной главы, определяющей некоторые методические трудности при работе с ней, является ее место в учебном процессе, а именно начало нового учебного года. Это ставит перед учителем одновременно две задачи: повторение основных тем курса планиметрии седьмого класса и изучение нового материала.

Учебный материал данной главы группируется вокруг четырехугольников, при этом доказательство почти всех теорем, а также решения многих задач ведутся с использованием признаков равенства треугольников. Также активно применяются свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, и признаки параллельности прямых, теорема о сумме углов треугольника. Таким образом, инструментарий, используемый в этой главе, учащиеся знают из курса седьмого класса, а значит, изучение темы полезно организовать как процесс обобщения и систематизации знаний учащихся.

Уровень геометрической подготовки учащихся и содержание изучаемой темы позволяют определить основную форму работы в виде *беседы* с активным привлечением школьников на всех этапах урока: при введении нового материала; его закреплении; решении задач.

Значительное внимание при изучении темы должно быть уделено задачам, в ходе решения которых применяются определения, свойства и признаки четырехугольников, а в результате их решения доказываются дополнительные свойства и признаки четырехугольников (388, 389, 399, 400, 408, 409). В дальнейшем для обоснования решения задач можно и нужно использовать свойства и признаки четырехугольников, полученные при решении этих задач.

Таким образом, в результате изучения темы «Четырехугольники» учащиеся получат новые знания о свойствах и признаках четырехугольников, при этом происходит систематизация и обобщение знаний о свойствах треугольников, признаках равенства треугольников, равнобедренных треугольниках, признаках и свойствах параллельных прямых.

Планируемые итоговые результаты изучения главы.

Учащиеся должны научиться:

– распознавать и изображать на чертежах и рисунках выпуклые и невыпуклые многоугольники, четырехугольники, параллелограммы, прямоугольники, ромбы, трапеции, внешние углы многоугольника;

– изображать, обозначать и распознавать на рисунке точки и простейшие фигуры:

- симметричные данным относительно точки;
- симметричные данным относительно прямой;

– выделять в чертеже конфигурации, необходимые для решения задачи;

– формулировать, иллюстрировать и доказывать основные свойства и признаки четырехугольников, теорему Фалеса, утверждения: о сумме углов выпуклого многоугольника и о сумме внешних углов выпуклого многоугольника;

– формулировать и объяснять понятия центральной симметрии и симметрии относительно прямой;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения, свойства и признаки четырехугольников;
- теорему Фалеса;
- утверждения: о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника и о сумме внешних углов выпуклого многоугольника;
- свойства углов со взаимно перпендикулярными и параллельными сторонами;
- понятия центральной симметрии и симметрии относительно прямой.

§1. Многоугольники (2 ч)

Комментарий для учителя

1. В этом параграфе систематизируются знания учащихся о многоугольниках и их частных видах — четырехугольниках, полученные ими в процессе изучения математики в I–VI классах. Поэтому в методическом плане понятия, вводимые здесь, достаточно просты и в известной степени знакомы учащимся, а значит, не требуют значительной отработки. Это позволяет закрепление введенной терминологии соединить с повторением вопросов курса геометрии VII класса, наиболее важных для изучения последую-

щего материала. Для этого можно использовать несложные задачи на применение признаков равенства треугольников, суммы углов треугольника, признаков параллельности прямых и свойств углов при параллельных прямых.

Текущие результаты изучения § 1. Учащиеся должны научиться:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках выпуклые и невыпуклые многоугольники и их элементы, внешние углы многоугольника, четырехугольники;

– формулировать и объяснять определения выпуклых и невыпуклых многоугольников и их элементов, внешних углов многоугольника, четырехугольников;

– формулировать и доказывать утверждения о сумме углов выпуклого многоугольника и о сумме внешних углов выпуклого многоугольника;

– решать задачи с использованием определений выпуклых и невыпуклых многоугольников, четырехугольников, утверждения о сумме углов выпуклого многоугольника и о сумме внешних углов выпуклого многоугольника.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. При введении понятия *ломаной* используется термин *смежные отрезки*, поэтому полезно на наглядном уровне объяснить этот термин. Для этого можно выполнить рисунок 1 или воспользоваться рисунком 150 а) из учебника и показать на чертеже *смежные отрезки* (A_1A_2 и A_2A_3; A_4A_5 и A_5A_6).

При этом следует обратить внимание на два важных момента:

1) *смежные отрезки* имеют общий конец;

2) *смежные отрезки* не лежат на одной прямой.

Отрабатывать это понятие не следует. Проконтролировать усвоение понятия длины ломаной можно с помощью следующего упражнения:

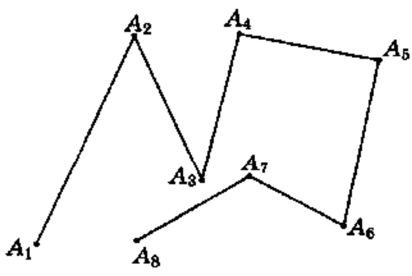


Рис. 1

> Запишите длину ломаной $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ (рис. 1) как сумму длин составляющих ее звеньев.

2°. Понятие *многоугольника* вводится на наглядном уровне. Для этого можно воспользоваться рисунком 150 б) из учебника, поэтому аналогичный рисунок следует выполнить на доске. С помощью того же рисунка иллюстрируются *определения вершин, сторон и диагоналей многоугольника.*

Для формирования умения применять понятие *многоугольника* и умения находить *многоугольники* в стандартных ситуациях рекомендуется выполнить работу по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 2, включив в набор заданных фигур контрпримеры 2) и 8). Поскольку понятие *многоугольника* является обобщением известных учащимся понятий, полезно в набор фигур плаката включить треугольник и четырехугольник. Работу с плакатом можно сопроводить вопросами:

1. Определите, на каких рисунках изображены *многоугольники.*
2. Объясните, почему фигура под номером 2) не является многоугольником.
(Потому, что смежные отрезки D_2D_3 и D_3D_4, а также отрезки D_4D_5 и D_5D_6 лежат на одной прямой.)

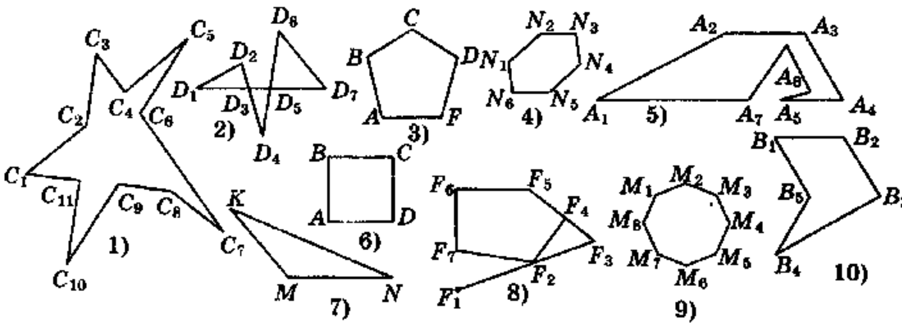


Рис. 2

3. Объясните, почему фигура под номером 8) не является многоугольником.
(Потому, что отрезки F_1F_2 и F_2F_3 лежат на одной прямой, а также отрезки F_2F_4 и F_3F_5 не являются смежными отрезками.)

3°. Понятие *периметра* известно учащимся с начальной школы и не требует отработки, необходимо простое напоминание.

Сначала полезно повторить определение *периметра* треугольника, а затем предложить учащимся сформулировать определение *периметра многоугольника*.

Для закрепления понятия *периметра многоугольника* можно использовать задачи 1 и 2 из дополнительных задач методического пособия. Эти задачи позволяют в ходе решения задач повторить первый и второй признаки равенства треугольников.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся выполнить упражнение 1 и записать формулировку определения* ***периметра многоугольника****. После выполнения задач 1 и 2 из дополнительных задач, если позволяет уровень подготовки класса, разобрать по тексту рабочей тетради решение задачи 3 и предложить учащимся самостоятельно решить задачу 4. Решение этих задач позволяет повторить* ***неравенство*** *треугольника. Задачу 2 можно использовать при повторении темы «****Четырехугольники****», что позволит повторить как свойства прямоугольника, так и понятие многоугольника.*

4°. Плакат (рис. 2) можно использовать для введения понятия *n-угольника* и *выпуклого многоугольника*. При этом полезно заметить, что когда у многоугольника число вершин достаточно большое, как правило, больше пяти, то все вершины обозначают одной буквой с индексами, например, как на рисунке 2, номера 1, 4, 9 и 10.

> *В рабочей тетради следует записать формулировку определения* ***n-угольника****. Для закрепления понятия* ***выпуклого многоугольника*** *рекомендуется выполнить упражнение 5.*

5°. Так как для доказательства утверждения *о сумме углов выпуклого n-угольника* используется тот факт, что из любой вершины выпуклого n-угольника можно провести n-3 диагонали, которые делят его на n-2 треугольника, то перед рассмотрением утверждения полезно устно по готовому чертежу решить следующие задачи:

> 1) Сколько диагоналей можно провести из одной вершины n-угольника, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) n — целое число, $n > 2$?

2) Из одной вершины выпуклого n-угольника проводятся все его диагонали. Сколько при этом образуется треугольников, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) n — целое число, $n > 2$.

После решения этих задач утверждения *о сумме углов выпуклого n-угольника* и *о сумме внешних углов выпуклого n — угольника* можно предложить учащимся разобрать по тексту учебника.

Затем на формирование умения применять полученную формулу можно предложить учащимся выполнить задачи 3–5 из дополнительных задач методического пособия.

В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку утверждения ***о сумме углов выпуклого n-угольника.*** *Затем выполнить упражнения 6–8, которые являются аналогом задач 3–5 из дополнительных задач методического пособия.*

6°. Понятие *четырехугольника* рассматривается в учебнике как частный вид многоугольника, поэтому пункт 42 *«Четырехугольник»* можно предложить учащимся для самостоятельной работы. При этом полезно напомнить учащимся, что четырехугольник обозначается последовательной записью его вершин, например четырехугольник $ABCD$ или $BCDA$.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради после работы над текстом пункта 42 следует выполнить упражнение 9.

7°. Изучение свойств и признаков различных четырехугольников опирается на знание *признаков равенства треугольников* и *признаков параллельности прямых и свойств углов при параллельных прямых и секущей* и умение применять их при решении задач.

Для повторения *признаков равенства треугольников* можно использовать следующие задачи, а их решение можно провести устно по готовым чертежам.

1. В четырехугольнике $ABCD$ соседние стороны AB и AD равны. Диагональ AC образует с этими сторонами равные углы. Докажите равенство треугольников ABC и ADC (рис. 3).
2. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC образует со сторонами четырехугольника равные углы. Докажите равенство треугольников ABC и ADC (рис. 4).

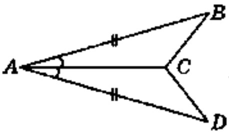


Рис. 3

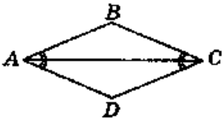


Рис. 4

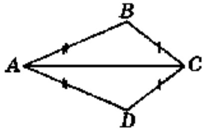


Рис. 5

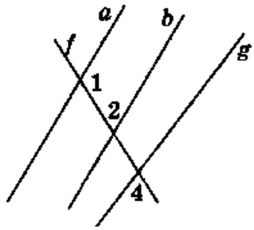


Рис. 6

3. Известно, что в четырехугольнике $ABCD$: $AB = AD$ и $BC = CD$. Докажите равенство треугольников ABC и ADC (рис. 5).

4. Диагонали четырехугольника, пересекаясь, делятся пополам. Одна из сторон четырехугольника равна 3 см. Чему равна противолежащая ей сторона четырехугольника?

Эти задачи позволяют повторить все три признака равенства треугольников и проверить умение: из равенства треугольников делать выводы о равенстве соответствующих элементов.

8°. Для повторения *признаков параллельности прямых и свойств углов при параллельных прямых и секущей* можно предложить следующие задачи:

1. По рисунку ответьте на вопросы (рис. 6).
   а) Параллельны ли прямые a и b, если $\angle 1 + \angle 2 = 180°$?
   б) Параллельны ли прямые a и b, если $\angle 1 + \angle 2 \neq 180°$?
   в) Параллельны ли прямые b и g, если $\angle 2 = 58°$, а $\angle 4 = 74°$?
2. Известно, что в четырехугольнике $ABCD$ прямые BC и AD параллельны, $\angle A = 53°$. Найдите градусную меру $\angle B$.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради для повторения **признаков равенства треугольников** и **признаков параллельности прямых и свойств углов при параллельных прямых и секущей** можно предложить учащимся выполнить задачи 10–15. Следует заметить, что эти задачи те же, что и приведенные выше.*

9°. На втором уроке рекомендуется провести самостоятельную работу, первые два задания которой — это задания с кратким ответом, а третье задание — с развернутым ответом.

Примерное планирование изучения материала

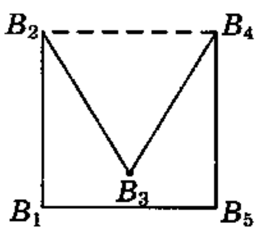
На <u>первом</u> уроке <u>в классе</u> — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 40 и 41, задачи 1–5 из дополнительных задач методического пособия; <u>дома</u> — самостоятельно разобрать пункт 42 *«Четырехугольники»*; вопросы 1–7 из вопросов для повторения к главе V, задачи 363 , 364 в), 365 б) и г), 366.

На <u>втором</u> уроке <u>в классе</u> — подробно проверить домашнее задание, повторить в ходе решения задач признаки равенства треугольников, признаки параллельности прямых и свойства углов при параллельных прямых и секущей; провести самостоятельную работу по теме «Многоугольники»; <u>дома</u> — задачи 367, 368 и 370.

Самостоятельная работа по теме «Многоугольники»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант



1. В четырехугольнике $B_1B_2B_4B_5$ все стороны равны, а треугольник $B_2B_3B_4$ — равносторонний. Найдите периметр многоугольника $B_1B_2B_3B_4B_5$, если периметр треугольника $B_2B_3B_4$ равен 24 см.

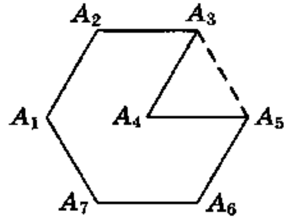
Ответ: ____________________

2. Сумма внутренних углов многоугольника равна сумме его внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Определите, сколько вершин имеет этот многоугольник.

Ответ: ____________________

3. Используя неравенство треугольника, определите, существует ли четырехугольник со сторонами, равными 5 см, 4 см, 2 см и 9 см.

2-й вариант



1. Треугольник $A_3A_4A_5$ — равносторонний, и его периметр равен 21 см. Найдите периметр многоугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, если периметр шестиугольника $A_1A_2A_3A_5A_6A_7$ в два раза больше периметра равностороннего треугольника $A_3A_4A_5$.

Ответ: ____________________

2. Сумма внутренних углов многоугольника в два раза меньше суммы внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Определите, сколько вершин имеет этот многоугольник.

Ответ: ____________________

3. Используя неравенство треугольника, определите, существует ли четырехугольник со сторонами, равными 5 см, 4 см, 2 см и 12 см.

Дополнительные задачи

1. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD образует со сторонами четырехугольника равные углы: $\angle ABD = \angle DBC = \angle BDA = \angle BDC$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если сторона $AB = 5$ см.

2. В четырехугольнике $ABCD$: стороны BC и AD равны, а диагональ BD, равная 9 см, образует со сторонами BC и AD равные углы: $\angle DBC = \angle ADB$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если периметр треугольника ADB равен 23 см.

3. Вычислите сумму углов выпуклого: а) пятиугольника; б) девятиугольника.

4. Сколько сторон имеет n-угольник, если сумма его углов равна: а) 1260°; б) 1980°?

5. Может ли в n-угольнике сумма его внутренних углов равняться: а) 360°; б) 380°?

6. Проверьте справедливость утверждения *о сумме углов выпуклого n-угольника* для треугольника.

7. В четырехугольнике $ABCD$ углы при соседних вершинах A и B равны 75° и 105°. Докажите, что прямые, содержащие стороны BC и AD, параллельны.

8. Диагональ AC четырехугольника $ABCD$ делит его на два равных треугольника ABC и CDA. Докажите, что противолежащие стороны четырехугольника параллельны.

§2. Параллелограмм и трапеция (4 ч)

Комментарий для учителя

В параграфе вводятся определения *параллелограмма* и *трапеции*, доказываются два *свойства* и три *признака параллелограмма*. Рассматриваемая в задачном материале параграфа теорема Фалеса является обязательной для изучения, поэтому учащиеся должны не только знать ее формулировку, но и уметь ее доказывать и применять при решении задач. В данной теме эта теорема находит непосредственное применение при решении задач на деление отрезка на n равных частей.

Текущие результаты изучения § 2. Учащиеся должны научиться:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках параллелограмм, трапецию, равнобедренную и прямоугольную трапеции;

– изображать и выделять из ситуации, изображенной на чертежах или рисунках, конфигурацию, позволяющую применить *теорему Фалеса*;

– формулировать и объяснять определения параллелограмма, трапеции, равнобедренной и прямоугольной трапеций;

– воспроизводить доказательства свойств и признаков параллелограмма и теорему Фалеса;

– решать задачи на вычисления, доказательства, применяя: определения параллелограмма и трапеции, свойства и признаки параллелограмма; теорему Фалеса;

– решать задачи на построение, применяя: основные алгоритмы построения с помощью циркуля и линейки; теорему Фалеса.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. При введении определения *параллелограмма* основное внимание необходимо направить не на запоминание учащимися формулировки определения, а на его понимание. Другими словами, если в условии сказано: «*Четырехугольник ABCD — параллелограмм...*», то учащиеся должны уметь выделить параллельные стороны: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$ и записать их в ходе решения задачи или в краткой записи условия. Формирование этого навыка будет проходить в процессе изучения всей темы.

Как всегда при введении определения следует обратить внимание учащихся на те признаки, в данном случае параллельность противолежащих сторон, которые позволяют из всех четырехугольников выделить конкретный вид, а именно *параллелограммы*.

На закрепление определения *параллелограмма* можно предложить учащимся приведенные ниже устные задания по готовому чертежу. Первые три задачи направлены на формирование умения *подводить под определение параллелограмма*, а четвертая — на формирование умения *применять определение параллелограмма*.

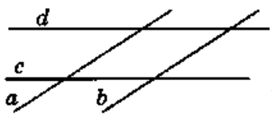


Рис. 7

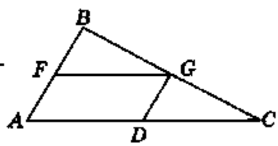


Рис. 8

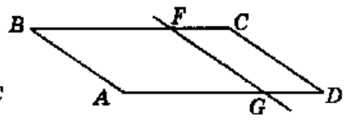


Рис. 9

1. При пересечении двух прямых a и b прямыми c и d образуется четырехугольник $ABCD$. Определите, в каком случае четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: а) $a \parallel b$, $c \nparallel d$; б) $a \parallel b$, $c \parallel d$; в) $a \nparallel b$, $c \nparallel d$ (рис. 7).

2. В треугольнике ABC параллельно сторонам AB и AC проведены прямые DG и FG. Определите вид четырехугольника $AFGD$ (рис. 8).

3. В параллелограмме $ABCD$ параллельно стороне AB проведена прямая FG. Определите вид четырехугольника $ABFG$ (рис. 9).

4. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A, которая пересекает сторону BC в точке F. Докажите, что треугольник ABF равнобедренный (рис. 10).

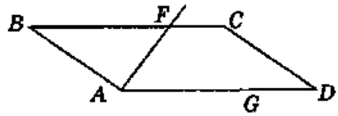


Рис. 10

После решения устных задач по готовому чертежу полезно по тексту учебника разобрать решение задачи 378.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения ***параллелограмма*** *и выполнить задачи 16–19, которые полностью совпадают с вышеприведенными задачами 1–4. При этом задачи 16–18 выполняются устно с краткой записью ответа, решение задачи 19 полезно оформить полностью. Затем по тексту учебника разобрать решение задачи 378.*

2°. Доказательство теоремы о *свойстве противолежащих сторон и углов параллелограмма* достаточно просто, поэтому его можно провести с активным привлечением учащихся. Если позволяет уровень знаний учащихся, то его можно провести по следующему сценарию. Во время проверки домашнего задания одному из хорошо успевающих учеников предложить на доске решить задачу:

В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Докажите, что треугольники ABC и ADC равны.

После разбора решения задачи делается вывод: из равенства треугольников ABC и ADC следует равенство сторон $AB = CD$ и $AD = BC$ и углов ABC и CDA и равенство углов DAB и BCD как суммы соответственно равных углов треугольников ABC и ADC.

На закрепление *свойства противолежащих сторон параллелограмма* можно предложить учащимся приведенные ниже устные задания.

1. Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ равны 9 см и 6 см. Чему равны стороны CD и AD?
2. Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ соответственно равны 9 см и 6 см. Чему равен периметр параллелограмма $ABCD$?

3. Периметр параллелограмма равен 28 см, одна из сторон параллелограмма равна 9 см. Определите все стороны параллелограмма.
4. Периметр параллелограмма равен 38 см. Чему равна сумма двух соседних сторон параллелограмма?

А на закрепление *свойства противолежащих углов параллелограмма* можно предложить учащимся устные задания.

1. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 43°$. Найдите градусную меру остальных углов параллелограмма.
2. В параллелограмме сумма двух противоположных углов равна 132°. Найдите градусную меру каждого из этих углов.
3. В параллелограмме сумма двух углов равна 120°. Могут ли эти углы прилежать к одной стороне параллелограмма?
4. Известно, что в параллелограмме один угол на 12° меньше другого. Могут ли эти углы быть противоположными?

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку ***свойства противолежащих сторон и углов параллелограмма****. После чего на закрепление этого свойства устно решить задачи 21–28, которые являются аналогом вышеприведенных задач.*

3°. Доказательство теоремы о *свойстве диагоналей параллелограмма* достаточно просто, поэтому его можно провести по тому же сценарию, что и доказательство *свойств противолежащих сторон и углов параллелограмма*. Во время проверки домашнего задания одному из хорошо успевающих учеников предложить на доске решить следующую задачу:

В параллелограмме $ABCD$ проведены диагонали, которые пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOB и COD равны.

После разбора решения задачи делается вывод: из равенства треугольников AOB и COD следует равенство сторон $AO = OC$ и $OD = OB$.

Для закрепления теоремы можно предложить учащимся устно выполнить следующие задания по готовому чертежу:

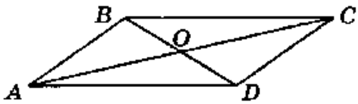


Рис. 11

1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD равна 12 см, точка О — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Чему равен отрезок DO (рис. 11)?

2. Точка O является точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Чему равна диагональ AC, если отрезок АО = 9 см (рис. 11)?

3. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ равна 9 см, а его диагонали равны 14 см и 10 см. Точка О является точкой пересечения диагоналей. Чему равен периметр ΔAOD (рис. 11)?

4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали равны, точка O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что ΔAOD — равнобедренный (рис. 11).

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы ***о свойстве диагоналей параллелограмма****, а затем устно решить задачи* ***30–33****, решение задачи* ***34*** *полезно оформить полностью. Если на уроке не хватит времени на решение задачи* ***34****, то ее можно предложить для домашнего задания. Задачи рабочей тетради* ***30–33*** *полностью совпадают с вышеприведенными задачами* ***1–4****.*

4°. Перед доказательством *признаков параллелограмма* полезно напомнить учащимся, что они уже встречались с понятием *«признак»*: *признак* равнобедренного треугольника, *признак* параллельных прямых и т.д.

5°. В доказательстве *признака параллелограмма по двум равным и параллельным сторонам* используется прием подведение под определение.

Доказательство *признака параллелограмма* достаточно просто, поэтому его можно провести с активным привлечением учащихся по следующему плану.

1. Изучение теоремы начинается с формулировки теоремы и выполнения чертежа по условию теоремы. Затем, выделив в формулировке теоремы условие ($ABCD$ — четырехугольник, $DC = AB$, $DC \parallel AB$) и заключение ($ABCD$ — параллелограмм), выполним краткую запись условия и заключения теоремы (рис. 12).

Дано: $ABCD$ — четырехугольник,
$DC = AB$,
$DC \parallel AB$
Доказать: $ABCD$ — параллелограмм.

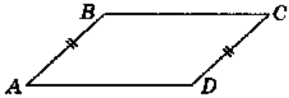


Рис. 12

2. Выполняется дополнительное построение: диагональ AC.
3. Доказывается равенство треугольников ABC и ADC.
4. Из равенства треугольников делается вывод о равенстве углов.
5. Доказывается параллельность прямых BC и AD.
6. Вывод: $ABCD$ — параллелограмм по *определению параллелограмма*.

На применение *признака параллелограмма по двум равным и параллельным сторонам* можно решить следующую задачу.

На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки AE и FC. Докажите, что четырехугольник $AFCE$ — параллелограмм.

6°. В доказательстве признаков *параллелограмма попарно равным сторонам* и *по диагоналям* используется *признак параллелограмма по двум равным и параллельным сторонам*. Схема их изложения аналогична схеме изложения *признака параллелограмма по двум равным и параллельным сторонам*.

На применение доказанных двух признаков *параллелограмма* можно решить следующие задачи.

1. Два равных равнобедренных треугольника ABD с основанием AD и BDC с основанием BC имеют общую боковую сторону. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.
2. В каждой из двух концентрических окружностей проведены диаметры AC и BD соответственно. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 13).

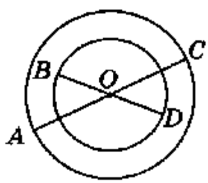


Рис. 13

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся по ходу урока записать формулировки ***признаков параллелограмма*** *и решить задачи 35–37, а затем по тексту тетради разобрать решение задачи 38. После этого учащиеся могут самостоятельно решить задачи 39 и 40, при этом возможна работа и по вариантам.*

7°. Перед введением *определения трапеции* полезно вспомнить с учащимися определение параллелограмма.

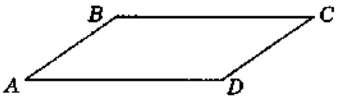


Рис. 14

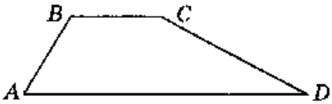


Рис. 15

У параллелограмма по определению противолежащие стороны попарно параллельны (рис. 14). Теперь рассматриваются такие четырехугольники, у которых две противолежащие стороны параллельны, а две другие не параллельны (рис. 15). Значит, если в условии сказано: «*Четырехугольник ABCD — трапеция с основанием AD ...*», то учащиеся должны уметь выделить параллельные стороны и записать их в ходе решения задачи или в краткой записи условия: $BC \parallel AD$.

На *закрепление понятия трапеции* можно предложить учащимся следующие вопросы:

> 1. В трапеции $ABCD$ с основанием AD проведите прямую CF, параллельную AB. Определите вид четырехугольника $ABCF$.
> 2. В трапеции $ABCD$ углы, прилежащие к стороне AD, равны $74°$ и $81°$. Определите углы, прилежащие к стороне BC.

Первая из предложенных выше задач подчеркивает отличие трапеции от параллелограмма: у трапеции только *одна пара сторон параллельна*. Вторая — их общность: углы, *прилежащие к боковым сторонам, являются внутренними односторонними при параллельных прямых* (основания трапеции или параллелограмма) *и секущей* (боковые стороны). При этом следует заметить, что для параллелограмма это утверждение верно и для второй пары сторон.

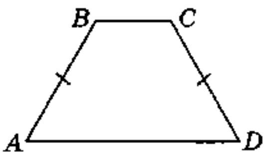


Рис. 16

При введении определения *равнобедренной трапеции* необходимо заметить, что к условию параллельности оснований добавляется еще одно условие, а именно равенство боковых сторон. Другими словами, если в условии сказано: «*Четырехугольник ABCD — равнобедренная трапеция с основанием AD...*», то учащиеся должны уметь выделить и записать $BC \parallel AD$ и $AB = CD$ в ходе решения задачи или в краткой записи условия (рис. 16).

На применение определения *равнобедренной трапеции* можно предложить учащимся решить следующую задачу:

Докажите, что в равнобедренной трапеции $ABCD$ с основанием AD (AD — бо́льшее основание) высоты BK и CL отсекают от трапеции два равных прямоугольных треугольника ABK и DCL.

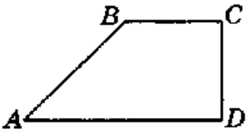


Рис. 17

При введении определения *прямоугольной трапеции* необходимо заметить, что к условию параллельности оснований добавляется еще одно условие, а именно перпендикулярность одной из боковых сторон к основанию. Другими словами, если в условии сказано: «*Четырехугольник ABCD – прямоугольная трапеция с основанием AD и прямым углом D...*», то учащиеся должны уметь выделить и записать $BC \parallel AD$ и $CD \perp AD$ в ходе решения задачи или в краткой записи условия (рис. 17).

На применение определения *прямоугольной трапеции* можно предложить учащимся решить следующую задачу:

Докажите, что в прямоугольной трапеции $ABCD$ ($CD \perp AD$) прямая CL ($L \in AD$) отсекает от трапеции прямоугольный треугольник.

*В рабочей тетради следует записать определения **трапеции, равнобедренной трапеции** и **прямоугольной трапеции** и выполнить задания 41–43.*

8°. Задачи 388 и 389 из учебника (глава V §2) содержат обратные утверждения. В задаче 388 сформулированы важные свойства равнобедренной трапеции: «*в равнобедренной трапеции углы при основании равны* и *диагонали равны*». В задаче 389 сформулированы признаки равнобедренной трапеции: «если *в трапеции углы при основании равны* или *диагонали равны*, *то трапеция — равнобедренная*». Доказательство утверждения задачи 388 непосредственно следует из решения задачи, рекомендованной на применение определения *равнобедренной трапеции*.

В рабочей тетради после решения задач 388 и 389 из учебника можно предложить учащимся решить задачи 44–45.

9°. Решения задач 384 и 385 (теорема Фалеса), приведенные в учебнике, полезно разобрать с учащимися по тексту учебника, с подробной записью на доске. Приведем пример схемы решения задачи 384.

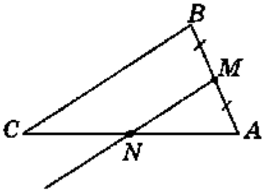


Рис. 18

Решение начинается с выполнения рисунка 18. Затем, используя рисунок, в формулировке задачи выделяются условие (ΔABC, $AM = BM$, $N \in AC$, $MN \| BC$) и заключение ($AN = NC$).

Дано: ΔABC,
$\underline{AM = BM,\ N \in AC,\ MN \| BC.}$
Доказать: $AN = NC$

Доказательство начинается с выполнения дополнительного построения: через точку C провести прямую CD, параллельную AB (рис. 19). Дополнительное построение всегда вызывает определенные трудности у учащихся как в понимании, так и в усвоении.

Поэтому можно провести небольшое исследование: *Из чего можно сделать вывод о равенстве отрезков*?

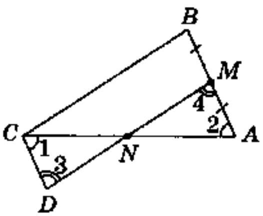


Рис. 19

Либо из равенства треугольников, либо из определения параллелограмма. Значит, необходимо сделать такое дополнительное построение, в результате которого получим два равных треугольника.

Для того чтобы учащиеся лучше усвоили основные идеи доказательства, полезно сделать краткую запись на доске:

1. Построение: прямой CD, параллельной AB.

2. Четырехугольник $CDMB$ — параллелограмм по *определению* ($MN \| BC$, по условию и $CD \| AB$ по построению).

3. $CD = AM$, так как $BM = CD$, по *свойству параллелограмма*, $AM = BM$ по условию.

4. $\Delta AMN = \Delta CDN$ по стороне ($CD = AM$) и двум углам ($\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ — накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущих AC и DM).

5. <u>Вывод:</u> $AN = NC$.

Для закрепления *теоремы Фалеса* (результат решения задачи 385) можно использовать следующие задания по готовым рисункам:

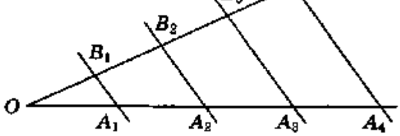


Рис. 20

1. Дано: $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$
$A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$;
$\underline{OB_4 = 28 \text{ см}}$
Найти: OB_1; OB_2; OB_3 (рис. 20).

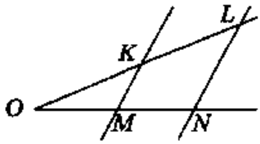


Рис. 21

2. Дано: $\angle KMO = \angle LNO = 116°$;
$OM = MN = 8$ см; $OK = 13$ см.
Найти: KL (рис. 21).

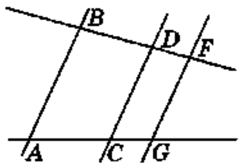


Рис. 22

3. Дано: $AB \parallel CD \parallel FG$;
$CG = 4$ см; $DF = 5$ см;
$BD = 10$ см.
Найти: AC (рис. 22).

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся устно решить задачи 46–49. Задачи рабочей тетради 46, 48 и 49 полностью дублируют вышеприведенные задачи 1–3.

Перед решением задачи 396 полезно напомнить учащимся, что в седьмом классе они решали задачу на построение: деление отрезка пополам. Этот алгоритм позволяет разделить отрезок на 2 равные части (а значит, и на 4, 8 и т. д.). А применение теоремы Фалеса дает способ деления отрезка на любое число равных частей.

Для лучшего усвоения алгоритма: деление отрезка на n равных частей, можно сначала предложить учащимся несколько упрощенную формулировку задачи.

Разделите данный отрезок на три равные части.

Затем разобрать решение задачи 396 по тексту учебника.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради можно предложить хорошо успевающим учащимся дома разобрать по тексту тетради решение задачи 50 (431 учебника) и решить задачу 432.*

10°. В параграфе рассматривается ряд задач на построение. Задачи на построение направлены на развитие пространственных представлений и конструктивного подхода к решению геометрических задач. Традиционно схема решения задачи на построение содержит анализ, построение, доказательство и исследование. Однако в требованиях, предъявляемых к умениям учащихся решать задачи на построение, заложено требование обязательного проведения только двух этапов решения: «*Задача считается решенной, если указан способ построения фигуры и доказано, что в результате выполнения указанных построений действительно получается фигура с заданными свойствами*». Однако в учебнике есть целый ряд сравнительно несложных задач, при решении которых проведение анализа обеспечивает построение.

Перед решением задач на построение полезно повторить основные задачи на построение: *построение треугольника по трем сторонам; угла, равного данному; биссектрисы угла; прямой, перпендикулярной данной; деление отрезка пополам.*

11°. На четвертом уроке рекомендуется провести самостоятельную работу по теме: «Параллелограмм и трапеция», первые два задания которой — это задания с кратким ответом, а третье задание — с развернутым ответом. В первых задачах обоих вариантов самостоятельной работы даны избыточные данные. Одно из них соответствует правильному значению искомой величины, другое — нет. Это позволяет сделать вывод: насколько ученик сознательно выбрал ответ.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 43, решить задачу 378; дома — вопросы 8–10 из вопросов для повторения к главе V, задачи 372 б), 375, 376 б) и г), 377.

На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 44, решить задачи 381 и 383; дома — вопрос 11 из вопросов для повторения к главе V, задачи 379, 380, 382.

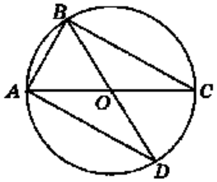
На третьем уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 45, разобрать по тексту учебника решения задач 384, 385 (теорема Фалеса), 386, 388 а), 389 а) и 396; дома — вопросы 12 и 13 из вопросов для повторения к главе V, задачи 387, 388 б) и 389 б) и 392 а).

На четвертом уроке в классе — провести самостоятельную работу по теме: «Параллелограмм и трапеция», решить задачи 393 б) и в), 395, 397 а); дома — задачи 393 а), 394, 397 б).

Самостоятельная работа по теме «Параллелограмм и трапеция»

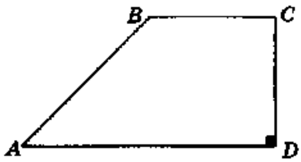
Самостоятельная работа планируется на 20 мин.

1-й вариант



1. В окружности с центром в точке O проведены диаметры AC и BD. Найдите хорду AD, если $AB = 7$ см, $CB = 9$ см.

Ответ: ______________________

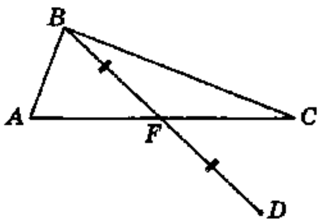


2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D$ — прямой) разность оснований AD и BC равна меньшей стороне CD. Найдите величину угла BAD.

Ответ: ______________________

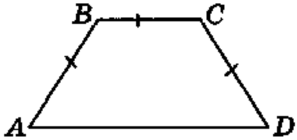
3. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что ее отрезок между параллельными сторонами делится этой точкой пополам.

2-й вариант



1. В треугольнике ABC из вершины B проведена медиана BF, и на ее продолжении отмечена точка D так, что $BF = FD$. Найдите расстояние между точками A и D, если стороны треугольника BC и AB соответственно равны 14 см и 6 см.

Ответ: ______________________



2. В трапеции $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны. Основание AD в два раза больше основания BC. Найдите угол CDA.

Ответ: ______________________

3. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону AD в точке K, а сторону CB — в точке L. Докажите, что отрезки AK и CL равны.

Указания к задачам

При решении задач 373 и 377 используются: свойство катета, лежащего против угла, равного 30°, и *свойства противолежащих сторон и углов параллелограмма*.

При решении задач 374 и 375 будет получен полезный промежуточный результат: *биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник*. Полезно на это обратить внимание учащихся.

В решении задачи 381 используется признак *параллелограмма (если в четырехугольнике стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм)*.

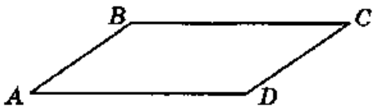


Рис. 23

Решение задач 393, 397 и 398 полезно начать с анализа. Сначала изображается параллелограмм для задачи 393 (рис. 23) или трапеция (рис. 31) для задач 397 и 398.

Затем необходимо выделить данные в условии задачи элементы более жирным изображением или цветом и, наконец, определить схему построения. Общим приемом решения этих задач является поиск треугольника, стороны которого заданы или легко могут быть получены из данных элементов. Само построение для лучшего усвоения решения задачи полезно выполнять в виде серии рисунков, на каждом из которых фиксируется один шаг решения.

Задача на построение 393 а). Из рисунка 24 видно, что сначала надо построить треугольник ABD, у которого известны две стороны (стороны параллелограмма) и угол между ними (угол параллелограмма).

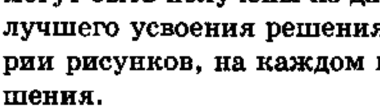


Рис. 24

Затем, в силу определения параллелограмма, через точку B провести прямую, параллельную стороне AD, а через точку D провести прямую, параллельную стороне AB. Точка пересечения прямых, параллельных сторонам AB и AD треугольника ABD, и будет четвертой вершиной искомого параллелограмма. Затем следует исследовать, что построенный параллелограмм — искомый и единственный. Единственность определяется единственностью построения треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Задача на построение 393 б). Из рисунка 25 видно, что сначала надо построить треугольник AOD, у которого известны две стороны (две половинки диагоналей параллелограмма) и угол между ними (угол между диагоналями параллелограмма).

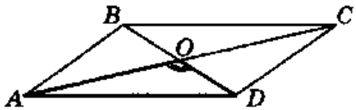


Рис. 25

Затем, в силу признака параллелограмма, на луче AO от точки O отложить отрезок OC, равный отрезку AO, а на луче DO от точки O отложить отрезок OB, равный отрезку DO. Соединить последовательно точки A, B, C и D. Затем следует исследовать, что построенный параллелограмм — искомый и единственный. Единственность определяется единственностью построения треугольника по двум сторонам и углу между ними.

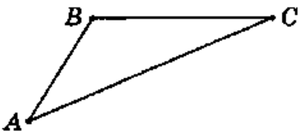


Рис. 26

Задача на построение 394. Три данные точки, не лежащие на одной прямой, определяют треугольник ABC (рис. 26). Каждая сторона треугольника может быть как стороной параллелограмма, так и его диагональю. Решение видно из рисунков 27–29. Если сторона AC — диагональ, то, в силу определения параллелограмма, через точку C проведем прямую, параллельную стороне AB, а через точку A проведем прямую, параллельную стороне BC. Точка D пересечения прямых, параллельных сторонам AB и BC треугольника ABD, и будет четвертой вершиной D искомого параллелограмма (рис. 27). Построенный четырехугольник $ABCD$ по определению является параллелограммом.

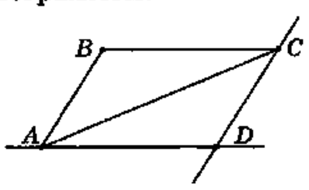


Рис. 27

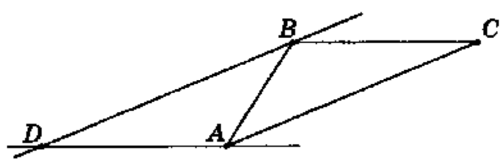


Рис. 28

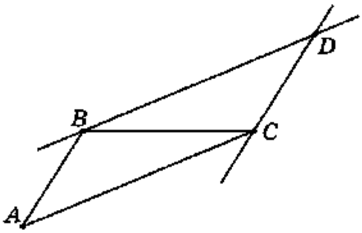


Рис. 29

В случае, когда за диагональ параллелограмма принимается сторона AB (рис. 28) или сторона BC (рис. 29), — построение аналогично.

Задача на построение 395. Обозначим $\angle hk$ через α; отрезок P_1Q_1 через h; отрезок P_2Q_2 через a. Из рисунка 30 видно, что сначала надо построить угол, равный α. На его стороне от вершины угла A отложить отрезок AB, равный a. Затем построить прямую, перпендикулярную стороне угла AB, и от точки K пересечения перпендикулярных прямых отложить отрезок KL, равный h, в ту полуплоскость, в которой лежит вторая сторона угла.

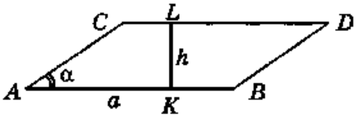


Рис. 30

Через точку L проведем прямую, параллельную стороне AB, ее пересечение со второй стороной угла — точка C. Через точку B проведем прямую, параллельную стороне AC, которая пересекается с прямой CL в точке D. Построенный четырехугольник $ABDC$ по определению является параллелограммом, а по построению — искомым и единственным.

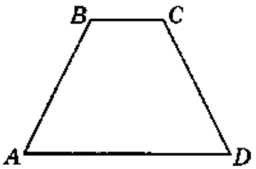


Рис. 31

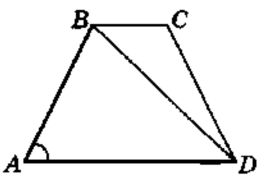


Рис. 32

Задача на построение 397 а). Из рисунка 32 видно, что сначала надо построить треугольник ABD по двум сторонам: боковой стороне трапеции AB и основанию AD и углу между ними. Затем через точку B провести прямую, параллельную стороне AD треугольника ABD. И, наконец, радиусом, равным стороне AB, сделаем засечку на прямой, параллельной стороне AD в точке C. Полученный четырехугольник $ABCD$ является по определению равнобедренной трапецией. Единственность определяется единственностью построения треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Задача на построение 397 б). Из рисунка 33 видно, что сначала надо построить треугольник BCD по трем сторонам: боковой стороне трапеции CD, равной стороне AB, так как искомая трапеция равнобедренная,

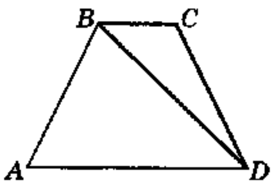


Рис. 33

основанию BC и диагонали BD. Затем через точку D провести прямую, параллельную стороне BC треугольника BCD. И, наконец, радиусом, равным стороне AB, сделаем засечку на прямой, параллельной стороне BC в точке A. Полученный четырехугольник $ABCD$ является по определению равнобедренной трапецией.

Единственность определяется единственностью построения треугольника по трем сторонам.

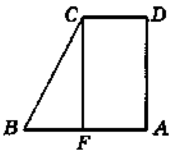


Рис. 34

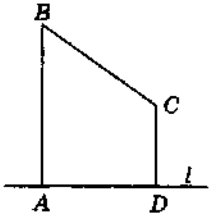


Рис. 35

Задача на построение 398. Первый способ. Из рисунка 34 видно, что сначала надо построить прямоугольный треугольник BCF по двум катетам: боковой стороне трапеции AD, перпендикулярной основаниям, и разности оснований.

Затем через точку C провести прямую, параллельную стороне BF треугольника BCF. И, наконец, на луче с началом в точке C, параллельном стороне BF, отложим отрезок CD, равный меньшему основанию трапеции, а на луче BF с началом в точке B отложим отрезок BA, равный большему основанию трапеции. Отрезок AD перпендикулярен основаниям трапеции, так как четырехугольник $CDAF$ — параллелограмм ($CD = FA$, и $CD \| FA$). Полученный четырехугольник $ABCD$ является по определению прямоугольной трапецией.

Второй способ. На прямой ℓ отложить отрезок, равный боковой стороне трапеции AD (рис. 35). Через точки A и D провести прямые, перпендикулярные прямой ℓ, и на них в одну полуплоскость отложить отрезки, соответственно равные основаниям трапеции AB и DC. Затем соединить точки B и C.

Дополнительные задачи

1. В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляр, опущенный из вершины B на сторону AD, делит ее пополам. Докажите, что треугольники ABD и BCD — равнобедренные.

2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали равны и пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник COD равнобедренный.

§3. Прямоугольник, ромб, квадрат (3 ч)

Комментарий для учителя

1. В параграфе рассматриваются *прямоугольник, ромб* и *квадрат*, являющиеся частными видами параллелограмма, вводятся их определения и доказываются теоремы о *свойстве диагоналей прямоугольника* и *ромба*; признак *прямоугольника*. Два признака *прямоугольника* сформулированы в задачах **399** и **400** учебника, а в задаче **408** учебника сформулированы два признака ромба. Знание этих признаков не является обязательным, однако решить эти задачи следует непременно на уроке, и ссылки на них при решении задач вполне допустимы. Кроме того, здесь рассматривается материал, связанный с *осевой и центральной симметрией*. Данный материал представляет для учителя определенную сложность в плане разумного сочетания наглядности с логическими обоснованиями при решении задач.

Текущие результаты изучения § 3. Учащиеся должны:

- изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках прямоугольник, ромб и квадрат;
- формулировать и объяснять определения прямоугольника, ромба и квадрата;
- объяснять:
  - какие точки симметричны относительно оси или точки;
  - что значит фигура обладает *осевой или центральной симметрией*;
- воспроизводить доказательства теорем: о свойстве диагоналей прямоугольника и ромба, о признаке прямоугольника, свойства прямоугольника, ромба и квадрата как частных видов параллелограмма;
- решать задачи, применяя:
  - определения прямоугольника, ромба и квадрата;
  - признак прямоугольника;

– теоремы о свойствах диагоналей прямоугольника и ромба;
– свойства прямоугольника, ромба и квадрата.

- решать простейшие задачи на применение понятий центральной и осевой симметрий.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. При введении определения *прямоугольника* основное внимание необходимо направить на понимание учащимися формулировки определения. Во-первых, учащиеся должны понимать, что *прямоугольник* — это параллелограмм, и поэтому все свойства параллелограмма справедливы и для *прямоугольника*:

– противоположные стороны прямоугольника равны и параллельны;

– диагонали прямоугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Во-вторых, у прямоугольника все углы — прямые.

Другими словами, если в условии сказано: «*Четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник...*», то учащиеся должны уметь выделить параллельные стороны: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, прямые углы: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, перпендикулярные стороны (записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия). Отработка этого навыка будет проходить в процессе изучения всей темы.

На закрепление определения *прямоугольника* можно предложить учащимся приведенные ниже устные задания по готовому чертежу. Первая задача направлена на формирование умения *применять определение прямоугольника*, а следующие две — на формирование умения *подводить под определение прямоугольника*.

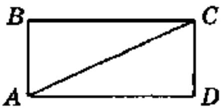


Рис. 36

Рис. 37

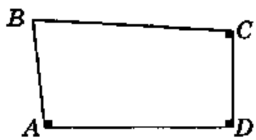


Рис. 38

1. В прямоугольнике $ABCD$ диагональ AC образует со стороной AD угол, равный 37°. Найдите градусную меру $\angle ACD$ (рис. 36).

2. В параллелограмме из вершин двух углов на противоположные стороны опущены перпендикуляры. Докажите, что полученный четырехугольник — прямоугольник (рис. 37).
3. Докажите, что если в четырехугольнике три угла прямые, то он является прямоугольником (рис. 38).

Затем можно устно по чертежу на доске решить задачи 399 и 400.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения ***прямоугольника*** *и выполнить задачу 51, решение задачи 52 следует предложить учащимся разобрать самостоятельно по тексту тетради, а решение задачи 53 полезно оформить полностью по предложенной схеме. После чего устно решить задачи 399 и 400 из учебника.*

2°. Доказательство теоремы о *свойстве диагоналей прямоугольника* достаточно просто, поэтому его можно провести фронтально с активным привлечением учащихся, выполнив на доске рисунок и краткую запись условия. Или можно сформулировать теорему в виде задачи и предложить выполнить ее решение хорошо успевающему ученику.

На прямое применение теоремы о *свойстве диагоналей прямоугольника* можно предложить учащимся устно по готовому чертежу (рис. 39) выполнить следующие упражнения.

1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что ΔAOB — равнобедренный (задача 402 учебника).
2. Меньшая сторона прямоугольника равна 6 см. Найдите длины диагоналей, если они пересекаются под углом 60°.
3. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что отрезок BO является медианой ΔABC.

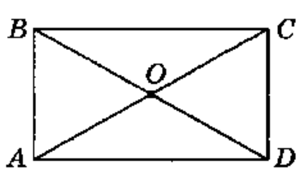


Рис. 39

В рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о ***свойстве диагоналей прямоугольника*** *и выполнить задачи 55–57, которые полностью совпадают с вышеприведенными задачами 1–3. После выполнения задачи*

57 можно предложить учащимся решить задачу 58 (404 учебника), при решении которой используется результат, полученный при решении задачи 58. В рабочей тетради довольно часто отводится место для записи решения задач, рекомендованных для устного решения. Поскольку рабочая тетрадь позволяет экономить время на уроке, то часть задач может быть выполнена письменно или после устного решения в классе для записи решения дома.

Затем можно предложить учащимся сформулировать утверждение, обратное утверждению теоремы о *свойстве диагоналей прямоугольника*, которое является *признаком* прямоугольника. Его доказательство можно предложить учащимся самостоятельно разобрать по тексту учебника. Кроме доказанного признака прямоугольника в условиях задач 399 и 400 даны формулировки еще двух признаков *прямоугольника*. Знание этих признаков полезно, и ссылки на них при решении задач вполне уместны.

В рабочей тетради задачи 2–5 из дополнительных задач даны под номерами 63–66.

3°. При введении определения *ромба* основное внимание необходимо направить на понимание учащимися формулировки определения. Во-первых, учащиеся должны понимать, что *ромб* — это параллелограмм, и поэтому все свойства параллелограмма справедливы и для *ромба*:

– *противоположные углы ромба равны;*

– *диагонали ромба пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*

Во вторых, *у ромба все стороны равны.*

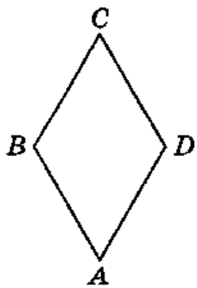


Рис. 40

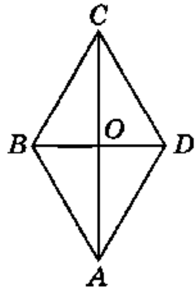


Рис. 41

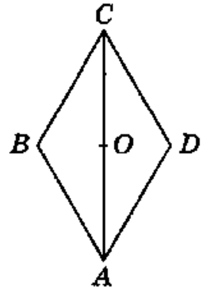


Рис. 42

Другими словами, если в условии сказано: «*Четырехугольник (параллелограмм) ABCD — ромб —...*», то учащиеся должны уметь выделить и записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия: параллельные стороны: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, равные углы: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, равенство сторон: $AB = BC = CD = AD$ (рис. 40), свойство диагоналей: $AO = OC$ и $BO = OD$ (рис. 41).

На закрепление *определения и свойств ромба* можно предложить учащимся приведенные ниже устные задания по готовому чертежу.

1. Периметр ромба $ABCD$ равен 56 см. Найдите его сторону (рис. 40).

2. Один из углов ромба $ABCD$ равен 72°. Найдите углы ромба (рис. 40).

3. Диагонали ромба $ABCD$ равны: $AC = 16$ см и $BD = 12$ см. Найдите отрезки OD и OC (рис. 41).

4. В ромбе $ABCD$ проведена диагональ AC. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный (рис. 42).

> ***В рабочей тетради следует записать определение*** **ромба** ***и выполнить задачи 67 и 68, которые полностью совпадают с вышеприведенными задачами 1–4.***

4°. Изучение теоремы о *свойствах диагоналей ромба* начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 41. Затем, выделив в формулировке теоремы условие ($ABCD$ — ромб; AC и BD — диагонали) и заключение (1. диагонали AC и BD перпендикулярны; 2. каждая диагональ является биссектрисой соответствующего угла ромба), следует обратить внимание учащихся на тот факт, что в теореме доказываются два свойства диагоналей ромба, т.е. доказываются две теоремы. Выполним краткую запись условия и заключения каждой из этих теорем.

Дано: $ABCD$ — ромб;	Дано: $ABCD$ — ромб;
AC и BD — диагонали ромба.	AC и BD — диагонали ромба.
Доказать: $AC \perp BD$.	Доказать: BD — биссектриса углов B и D; AC — биссектриса углов C и A.

Доказательство теоремы о *свойствах диагоналей ромба* достаточно просто, поэтому его можно провести фронтально с активным привлечением учащихся.

На прямое применение теоремы о *свойствах диагоналей ромба* можно предложить учащимся устно по готовому чертежу выполнить следующие упражнения:

1. В ромбе $ABCD$ угол BAD равен 50°. Найдите углы треугольника ABC (рис. 42).

2. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, угол BAD равен 46°. Найдите углы треугольника AOD (рис. 41).

В рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о ***свойствах диагоналей ромба*** *и выполнить упражнения 71 и 72, которые полностью совпадают с вышеприведенными задачами 1 и 2.*

Затем можно предложить учащимся сформулировать утверждения, обратные утверждению теоремы о *свойствах диагоналей ромба*. Эти утверждения сформулированы в задаче 408 учебника и являются признаками ромба:

«Если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то он является ромбом».

«Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его углов, то он является ромбом».

Этими признаками можно пользоваться при решении задач.

Поскольку решение задачи 408 достаточно простое, то можно предложить учащимся решить задачу устно по готовому чертежу (рис. 41). Следует обратить внимание учащихся, что при решении обеих задач применяется метод *подведения под определение*, в данном случае *ромба*.

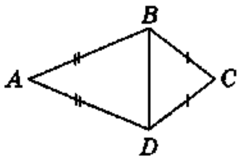


Рис. 43

Полезно после решения задачи 408 уточнить условие *«если у параллелограмма диагонали перпендикулярны...»* и привести контрпример: *«если у четырехугольника диагонали перпендикулярны...»* (рис. 43).

В рабочей тетради в задаче 66 учащимся предлагается привести контрпример.

5°. При введении определения *квадрата* учащиеся должны понимать, что *квадрат* является одновременно и прямоугольником, и ромбом по определению. А значит, все свойства прямоугольника и ромба справедливы для квадрата:

– *все углы квадрата прямые;*

– *диагонали квадрата равны;*

– *диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам;*

– *диагонали квадрата являются биссектрисами его углов (рис. 44).*

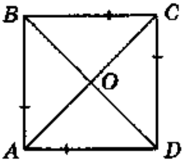


Рис. 44

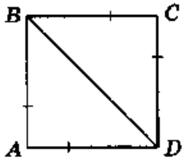


Рис. 45

Другими словами, если в условии задан *квадрат ABCD*, то учащиеся должны уметь выделить и записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия равные стороны: $AB = BC = CD = AD$, параллельные стороны: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, прямые углы: $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90°$, свойства диагоналей: $AC = BD$ и $AO = OC$, $BO = OD$.

На закрепление *определения и свойств квадрата* можно предложить учащимся приведенные ниже устные задания по готовому чертежу:

1. Периметр квадрата равен 28 см. Найдите его сторону.
2. В квадрате $ABCD$ проведена диагональ BD (рис. 45). Определите:
   1) вид треугольника ABD;
   2) углы треугольника ABD.
3. В квадрате $ABCD$ проведены диагонали BD и AC (рис. 44).
   1) Определите вид треугольника AOD.
   2) Определите углы треугольника AOD.
   3) Найдите диагональ BD, если диагональ $AC = 6$ см.

В рабочей тетради следует записать определение ***квадрата*** *и выполнить задачи 75–77, которые полностью совпадают с вышеприведенными задачами 1–3. В задаче 78 (409 учебника) сформулирован и доказан признак квадрата. После разбора решения задачи 78 следует доказать еще один признак квадрата, сформулированный в задаче 79.*

6°. Материал пункта 47 дается в обзорном плане и вводится на понятийном уровне.

Понятия *точки, симметричной данной относительно прямой* (рис. 46), и *точки, симметричной данной относительно точки* (рис. 47), в учебнике вводятся конструктивно, тем самым задаются правила построения точки, симметричной данной относительно фиксированной прямой или относительно фиксированной точки.

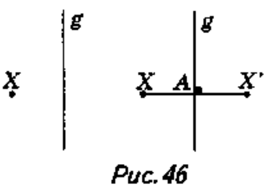


Рис. 46

При введении понятия *точки, симметричной данной относительно прямой*, основное внимание необходимо направить на понимание того, что, если в условии сказано: «*...точка X симметрична точке X' относительно прямой g...*», то учащиеся должны записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия $AX = AX'$ и $XX' \perp g$. При объяснении правила построения *точки, симметричной данной относительно прямой,* полезно использовать рисунок **46** (выполняется по ходу объяснения).

На формирование умения <u>*применять*</u> понятие *симметрии относительно прямой* можно предложить учащимся несколько простых заданий и вопросов:

1. Постройте точку A', симметричную точке A относительно прямой g.

2. Какая точка симметрична точке A относительно прямой g?

Затем можно решить задачу 416 из учебника.

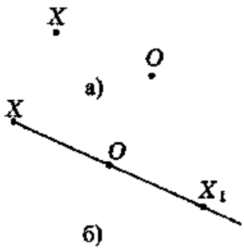


Рис. 47

При введении определения *преобразования симметрии относительно точки* основное внимание необходимо направить на понимание того, что если в условии сказано: «*...точка X симметрична точке X' относительно точки O...*», то учащиеся должны записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия $OX = OX'$. При этом они должны четко понимать, что точки X, X' и O лежат на одной прямой XX'. При объяснении правила построения *точки, симметричной данной относительно данной точки,* полезно использовать рисунок 47, который выполняется по ходу объяснения.

На формирование умения <u>*применять*</u> понятие *симметрии относительно точки* можно предложить учащимся несколько простых заданий и вопросов:

1. Дана точка O. Постройте точку A', симметричную точке A относительно точки O.
2. Какая точка симметрична точке A' относительно точки O?
3. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Назовите точку, симметричную точке A (точке B, точке C, точке D) относительно точки O.

Затем можно выполнить упражнение:

Даны точки M и M', симметричные относительно некоторой точки O. Постройте точку N', симметричную данной точке N относительно этой же точки O.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся по ходу объяснения учителя выполнить задания 80–87.

7°. На третьем уроке рекомендуется провести самостоятельную работу, первое задание — это задание с кратким ответом, второе, третье и четвертое задания — задания с выбором ответа.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 46, решить задачи 399, 400, 402 и 404; дома — вопросы 14 и 15 из вопросов для повторения к главе V, задачи 401, 403.

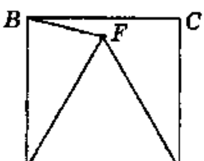
На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 47, решить задачи 408 и 410 из учебника; дома — вопросы 16 и 17 из вопросов для повторения к главе V, задачи 405, 411 и 412.

На третьем уроке в классе — провести самостоятельную работу по теме: «Прямоугольник. Ромб. Квадрат», рассмотреть весь теоретический материал пункта 48, решить задачи 416–418, 421–423; дома — вопросы 18–22 из вопросов для повторения к главе V, задачи 413 б), 414 б), 415 б), 419 и 420.

Самостоятельная работа по теме «Прямоугольник. Ромб. Квадрат»

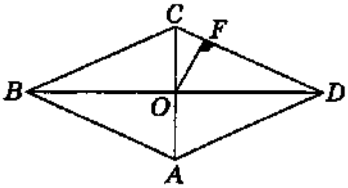
Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант



1. Внутри квадрата отмечена такая точка F, что треугольник AFD — равносторонний. Найдите угол FBC.

Ответ: ____________________

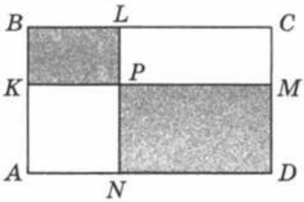


2. Сторона ромба равна 10 см, а один из его углов равен 30°. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба.

Ответ: 1) 5 см; 2) 2,5 см; 3) 20 см; 4) 10 см.

3. В параллелограмме $ABCD$ углы BAC и CDB равны. Определите вид параллелограмма $ABCD$, если стороны AB и AD равны:

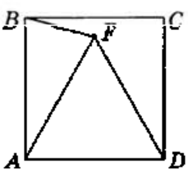
1. *прямоугольник, отличный от квадрата;*
2. *ромб, отличный от квадрата;*
3. *квадрат;*
4. *определить нельзя.*



4. В прямоугольнике $ABCD$ через точку P проведены прямая KM, параллельная сторонам AD и BC, и прямая LN, параллельная сторонам AB и CD. Периметр прямоугольника $KBLP$ равен 8 см, а периметр прямоугольника $NPMD$ равен 18 см. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$.

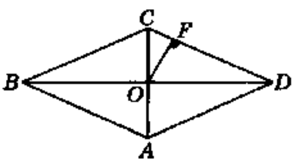
Ответ: 1) 10 см; 2) 26 см; 3) 8 см; 4) 18 см.

2-й вариант



1. Внутри квадрата отмечена такая точка F, что треугольник AFD равносторонний. Найдите угол AFB.

Ответ: ______________________________



2. В ромбе $ABCD$ с острым углом 30° расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба CD равно 3 см. Найдите периметр ромба.

Ответ: 1) 6 см; 2) 48 см; 3) 12 см; 4) 24 см.

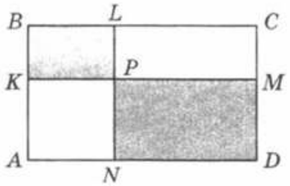
3. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ делит тупой угол B пополам. Определите вид параллелограмма $ABCD$:

1. прямоугольник, отличный от квадрата;

2. ромб, отличный от квадрата;

3. квадрат;

4. определить нельзя.



4. В прямоугольнике $ABCD$ через точку P проведены прямая KM, параллельная сторонам AD и BC, и прямая LN, параллельная сторонам AB и CD. Периметр прямоугольника $KBLP$ равен 8 см, а периметр прямоугольника $NPMD$ равен 18 см. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$.

Ответ: 1) 10 см; 2) 26 см; 3) 8 см; 4) 18 см.

Указания к задачам

Задачи 399, 400, 408, 409 и 411 направлены на формирование у учащихся умения применять метод *подведения под определение*, в случае задач 399 и 400 — *прямоугольника*, в задаче 408 — *ромба*, а в задачах 409 и 411 — *квадрата*. При этом следует обратить внимание учащихся на то, что для *подведения* данной фигуры под *определение прямоугольника* необходимо проверить выполнение двух условий: данная фигура должна быть параллелограммом и у нее все углы должны быть прямые; для *подведения* данной фигуры под *определение ромба* — данная фигура должна быть параллелограммом и у нее все стороны должны быть равны; а для *подведения* данной фигуры под *определение квадрата* — данная фигура должна быть прямоугольником и у нее все стороны должны быть равны.

По условию задачи 399 данный четырехугольник является параллелограммом, т.е. требуется доказать, что у него все углы прямые. По условию задачи 400 у данного четырехугольника углы прямые, т.е. требуется доказать, что он является параллелограммом. По условию задачи 408 данный четырехугольник является параллелограммом, т.е. требуется доказать, что у него все стороны равны. По условию задачи 409 данный четырехугольник является ромбом, т.е. требуется доказать, что у него все углы прямые.

После проверки задачи 401 из домашнего задания можно порекомендовать выполнить задачи 2–5 из дополнительных задач методического пособия. При решении всех этих задач следует обратить внимание учащихся на тот факт, что *биссектриса угла прямоугольника отсекает от него прямоугольный равнобедренный треугольник*. Это свойство биссектрисы угла прямоугольника полезно при решении других задач.

Решение задачи 404 будет проще, если перед ее решением предложить учащимся решить задачу 7 из дополнительных задач методического пособия.

Задачу 410 рекомендуется решить устно на уроке, при этом очень важно обратить внимание учащихся на точное (внимательное) прочтение формулировки.

Задачи на построение 413–414 полезно начать с анализа. Сначала изображается прямоугольник, ромб или квадрат, затем необходимо выделить заданные элементы более жирным изображением или цветом и, наконец, определить схему построения.

Задача на построение 413 а). Из рисунка 48 видно, что сначала надо построить две пересекающиеся перпендикулярные прямые.

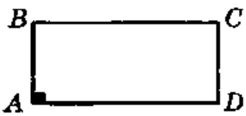


Рис. 48

Затем на каждой из них от точки A пересечения перпендикулярных прямых на одной прямой отложить отрезок AB, а на другой прямой — отрезок AD. В силу определения параллелограмма через точку B провести прямую, параллельную прямой AD, а через точку D провести прямую, параллельную прямой AB. Точка пересечения прямых, параллельных прямым AB и AD, будет четвертой вершиной искомого прямоугольника.

Задача на построение 413 б). Из рисунка 49 видно, что сначала надо построить прямоугольный треугольник ABD по катету (сторона прямоугольника) и гипотенузе (диагональ прямоугольника).

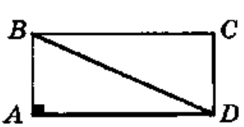


Рис. 49

Затем через точку B провести прямую, параллельную прямой AD, а через точку D провести прямую, параллельную прямой AB. Точка пересечения прямых, параллельных прямым AB и AD, будет четвертой вершиной искомого прямоугольника.

Задача на построение 413 в). Из рисунка 50 видно, что сначала надо построить равнобедренный треугольник AOD, у которого

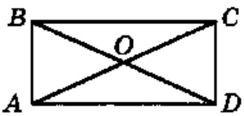


Рис. 50

известны две стороны (половинка диагонали прямоугольника) и угол между ними (угол между диагоналями прямоугольника). Затем, в силу признака параллелограмма, на лучах AO и DO от точки O отложить отрезки OC и OB, равные отрезку AO. Соединить последовательно точки A, B, C и D. Полученный прямоугольник будет искомым.

Задача на построение 414 а). Из рисунка 51 видно, что сначала надо построить две пересекающиеся перпендикулярные прямые.

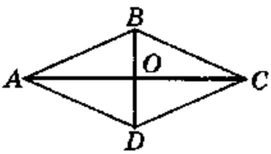


Рис. 51

Затем каждый из данных отрезков разделить пополам. От точки O пересечения перпендикулярных прямых на одной прямой отложить равные отрезки OC и AO, а на другой прямой — равные отрезки OB и OD. Соединить последовательно точки A, B, C и D. Построенный параллелограмм является ромбом, что следует из признака ромба, доказанного в задаче 408.

Задача на построение 420. Пусть AK — биссектриса угла равнобедренного треугольника MAN с основанием MN (рис. 52). Возьмем точку X на стороне AM и построим симметричную ей точку X' относительно прямой AK. Треугольники ABX и ABX' равны по двум катетам (AB — общий, $BX = BX'$ по определению симметрии относительно прямой).

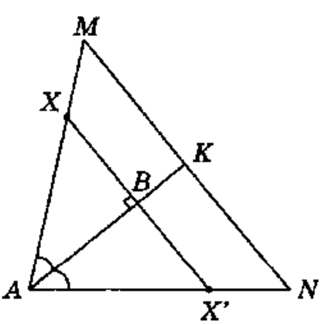


Рис. 52

Из равенства треугольников следует: $\angle XAB = \angle X'AB$. Значит, угол $X'AB$ равен углу NAB и по аксиоме откладывания углов AX' и AN совпадают, т.е. точка X' лежит на стороне AN угла MAN. А это значит, что угол MAN при симметрии относительно биссектрисы переходит сам в себя. Следовательно, прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии. Вершина угла A лежит на оси симметрии и переходит сама в себя.

Дополнительные задачи

1. В параллелограмме $KLMN$ каждый из углов LKM и MNL равен 57°. Определите, является ли параллелограмм $KLMN$ прямоугольником.

2*. Стороны прямоугольника равны 11 см и 4 см. Биссектрисы углов, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три части. Найдите длины этих частей.

3*. Стороны прямоугольника равны 5 см и 4 см. Биссектрисы углов, прилежащих к бóльшей стороне, делят противоположную сторону на три части. Найдите длины этих частей.

4*. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектрисы его углов A и B делят сторону CD на три равные части, длина каждой — 4 см.

5*. В условии задачи № 3 длины сторон измените так, чтобы длина среднего отрезка равнялась нулю, запишите новое условие задачи.

6. В параллелограмме, смежные стороны которого не равны, проведены биссектрисы углов. Докажите, что при их пересечении образуется прямоугольник.

7. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что отрезок BO является медианой треугольника ABC.

8. Сторона ромба равна 18 см, а один из углов равен 150°. Найдите расстояние между его противолежащими сторонами.

9. Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

10*. Определите, вершинами какого четырехугольника являются точки пересечения диагоналей квадратов, построенных на сторонах параллелограмма вне его.

Заключительный урок по теме «Параллелограмм и его частные виды» (1 ч)

Комментарий для учителя

В пунктах 43, 44, 45, 46 и 47 рассматривались определения, свойства и признаки параллелограмма и его частных видов: прямоугольника, ромба, квадрата, а также трапеции. На заключительном уроке следует провести систематизацию и обобщение знаний и умений учащихся по изученной теме.

В результате систематизации и обобщения изученной темы учащиеся должны научиться:

– *распознавать* на чертежах и изображать на чертежах и рисунках: выпуклые и невыпуклые четырехугольники, параллелограммы, прямоугольники, ромбы, квадраты;

– *описывать* ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок, соотносить чертеж и текст;

– *выделять* в чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для решения задачи;

– *понимать*, что все изученные в данной теме четырехугольники являются параллелограммами, а дополнительные свойства (равенство сторон или углов) позволяют выделять частные виды параллелограмма;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство определения, свойства и признаки четырехугольников.

Методические рекомендации к изучению материала

1*. На заключительном этапе изучения темы полезно *обобщить* и *систематизировать знания* учащихся о *параллелограммах и их частных видах*. Можно порекомендовать организовать урок в форме фронтальной беседы. Для этого предложить учащимся записать традиционную схему (рис. 53), из которой видно, что прямоугольник и ромб обладают всеми свойствами параллелограмма и, кроме того, имеют свои, только им присущие свойства, а квадрат является универсальным четырехугольником, обладающим всеми свойствами как параллелограмма, так и прямоугольника и ромба. После этого, двигаясь от четырехугольника к четырехугольнику, наполнять схему конкретными сведениями о свойствах четырехугольников. При этом можно для записи использовать зрительный ряд, т.е. фиксировать свойства четырехугольников с помощью рисунков и краткой записи. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 54.

Рис. 53

Повторение можно провести примерно по следующей схеме:

1) повторить определение и свойства *параллелограмма*;

2) повторить определения и свойства *прямоугольника* и *ромба*, включая и свойства *параллелограмма*;

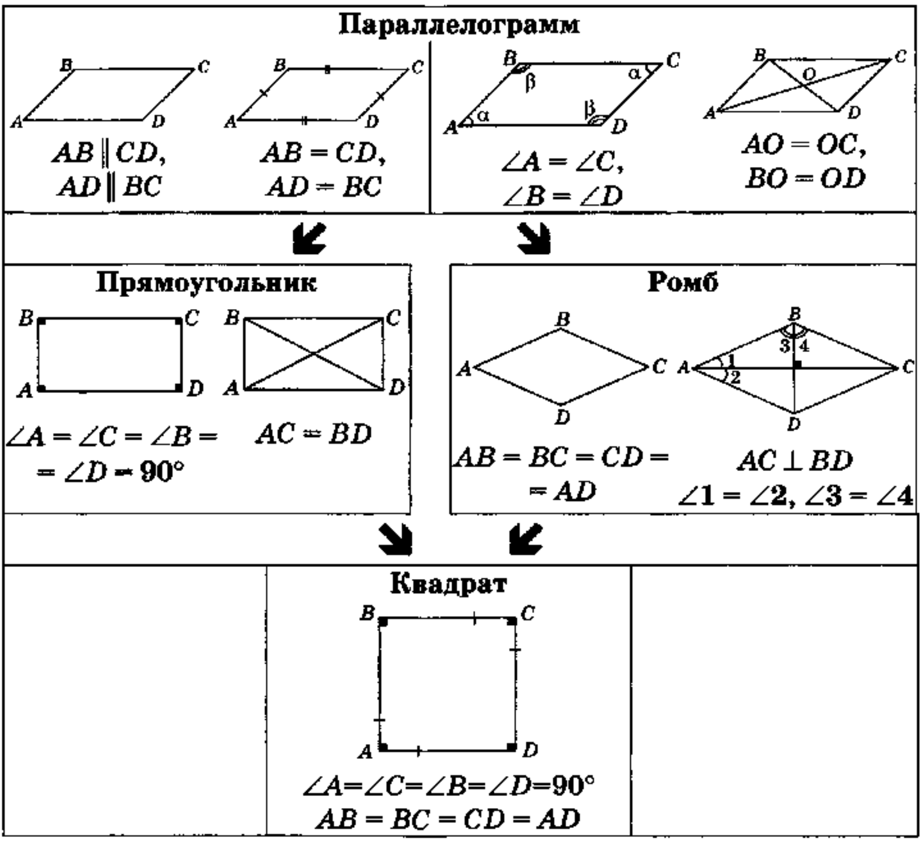


Рис. 54

3) подчеркнуть, что параллелограмм, у которого <u>*все углы равны*</u>, является ***прямоугольником***, а параллелограмм, у которого все <u>*стороны равны*</u>, является ***ромбом***.

4) повторить характеристические свойства частных видов параллелограмма:

а) перпендикулярность сторон и равенство диагоналей прямоугольника и квадрата;

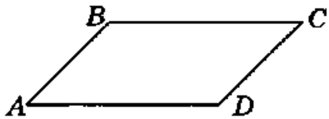
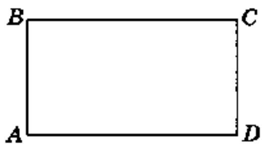
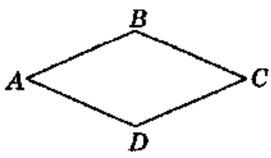
б) перпендикулярность диагоналей и равенство сторон квадрата и ромба;

в) свойство диагоналей квадрата и ромба быть биссектрисами соответствующих углов.

5) подчеркнуть универсальность квадрата как частного вида параллелограмма.

Затем следует повторить признаки параллелограмма и его частных видов. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 55.

Из практики преподавания геометрии хорошо известно, что учащиеся, как правило, достаточно уверенно делают ссылки при решении задач на свойства фигур и испытывают определенные трудности при подведении фигуры под определение или признак.

Если у четырехугольника: 1. $AB \parallel CD, AD \parallel BC,$ 2. $AB \parallel CD\ AB = CD,$ 3. $AO = OC, BO = OD$ 4. $AB = CD, BC = DA$	➔	*то*	 ***параллелограмм***
Если у параллелограмма: 1. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ 2. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ 3. $\angle A = 90°$ 4. $AC = BD$	➔	*то*	 ***прямоугольник***
Если у параллелограмма: 1. $AB = BC = CD = AD$ 2. $AC \perp BD$ 3. BC – биссектриса $\angle A$ и $\angle C$ ***Если у четырехугольника:*** $AB = BC = CD = AD$	➔ ➔	*то*	 ***ромб***

Если у прямоугольника:

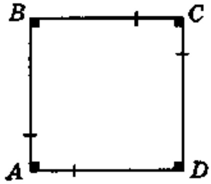
1. $AB = BC = CD = AD$ ➔

2. $AC \perp BD$

Если у ромба:

$\angle A = 90°$ ➔

то



квадрат

Рис. 55

Поэтому следует еще раз обратить внимание учащихся на то, в каких ситуациях применяются свойства фигур, а в каких — признаки:

- если в условии задачи *дан параллелограмм* (прямоугольник, ромб или квадрат), то можно использовать в решении любое *свойство параллелограмма* (прямоугольника, ромба или квадрата);
- если в условии задачи *дана характеристика* некоторого *четырехугольника* и по этой характеристике необходимо определить вид четырехугольника, то применяются *признаки*.

Проиллюстрировать применение *признаков параллелограмма* и *прямоугольника* можно на следующей задаче:

> В окружности с центром в точке O проведены диаметры AC и BD. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

На основании того, что диагонали (диаметры AC и BD) четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (центр окружности) и делятся пополам: четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, а затем из равенства диагоналей (диаметры одной окружности): параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.

2°. После проведенной систематизации и обобщения знаний учащихся о параллелограмме и его частных видах полезно провести повторение изученного материала в ходе решения задач. При подготовке к итоговой контрольной работе следует провести повторение, используя весь оставшийся резерв времени, оставив один урок для разбора решений итоговой работы. Для этого можно использовать задачи из учебника, нерешенные в процессе изучения темы, или задачи из дополнительных задач методического пособия, рекомендованные к соответствующим пунктам. Особенно полезны для заключительного повторения в данной теме задачи на построение.

Кроме того, можно воспользоваться сборником тестов Т.М. Мищенко и А.Д. Блинкова «Геометрия. Тесты. 8 класс» к учебнику Л.С. Атанасяна и др. издательства «Просвещение». В этом сборнике для главы V «Четырехугольники» рекомендованы тесты 2, 3, 4, 5 и 6, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Каждый тест имеет четыре варианта.

Первый вариант: итоговый тест по теме можно создать из тестов сборника, используя часть заданий из каждого теста. При этом полезно включить в него задание 5 из теста 2 и задания 4, 8 из теста 4.

Второй вариант: Поскольку тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, можно из каждого теста выполнить по одному варианту устно.

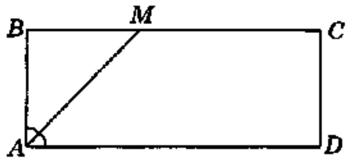
Первый вариант более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся. При этом рекомендуется обратить внимание на задания на определение вида некоторой фигуры. Использование таких заданий крайне полезно для обучения школьников умению применять определения фигур и их признаки, приводя при этом доказательные рассуждения. Таким образом, при определении вида той или иной фигуры учащиеся должны не полагаться на чертеж, а проверять правильность своего утверждения с помощью известных теорем о признаках и свойствах данной фигуры.

3°. В контрольной работе первые три задачи — это задачи с выбором ответа и с кратким ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись в самой работе при решении этих задач не следует. В задачах 4–5 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

При использовании в учебном процессе рабочей тетради ее можно использовать как конспект темы и просмотреть решение опорных задач. Поскольку в рабочей тетради по каждому пункту темы дано избыточное число задач, то из не решенных в процессе изучения темы задач можно сделать подборку для урока повторения.

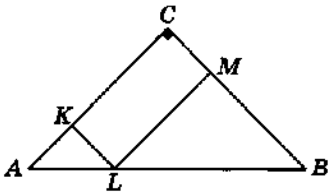
Контрольная работа по теме «Четырехугольники» (1 ч)

1-й вариант



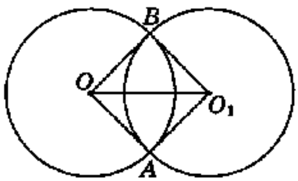
1. В прямоугольнике $ABCD$ проведена биссектриса угла A. Найдите периметр прямоугольника, если $BM = 2$ см, $CM = 3$ см.

Ответ: 1) 10 см; 2) 7 см; 3) 14 см; 4) 4 см.



2. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан параллелограмм $LKCM$ так, что они имеют общий прямой угол C, а вершина противоположного угла лежит на гипотенузе AB. Найдите периметр параллелограмма, если $AC = 12$ см.

Ответ: ____________________



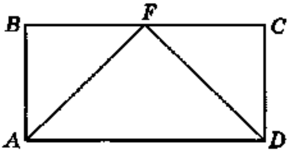
3. Две окружности с центрами в точках O и O_1 и равными радиусами пересекаются в точках A и B. Определите вид четырехугольника AO_1BO, если $AB = OO_1$.

Ответ: ____________________

4. Меньшая сторона прямоугольника равна 10 см. Угол между его диагоналями равен 60°. Вычислите длину диагонали прямоугольника.

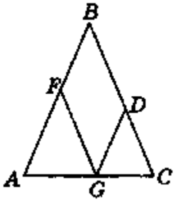
5. Диагональ трапеции является биссектрисой одного из ее углов. Докажите, что две стороны этой трапеции равны.

2-й вариант



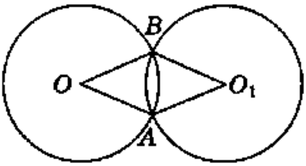
1. Биссектрисы углов A и D прямоугольника $ABCD$ пересекаются на стороне BC в точке F. Найдите периметр прямоугольника, если длина BF равна 6 см.

Ответ: 1) 18 см; 2) 36 см; 3) 12 см; 4) 30 см.



2. На сторонах равнобедренного треугольника ABC отмечены такие точки F, D и G, что $FBDG$ — параллелограмм. Найдите периметр параллелограмма, если $BC = 14$ см.

Ответ: ____________________



3. Две окружности с центрами в точках O и O_1 и равными радиусами пересекаются в точках A и B. Определите вид четырехугольника AO_1BO.

Ответ: ____________________

4. Диагональ прямоугольника равна 10 см. Угол между его диагоналями равен 60°. Вычислите длину меньшей стороны прямоугольника.

5. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A, которая пересекает сторону BC в точке F. Докажите, что треугольник ABF равнобедренный.

ГЛАВА VI. ПЛОЩАДЬ (14 ч)

Особенностью данной главы является раннее введение понятия площади в курсе планиметрии. С понятием площади и формулой для вычисления площади прямоугольника в случае, когда длины сторон — натуральные числа, учащиеся познакомились в начальной школе; в V–VI классах они приобрели некоторый навык ее использования. Теперь эта формула будет доказана для общего случая, на ее основе выводится формула площади параллелограмма, которая используется при выводе формул площади треугольника и трапеции.

В ходе изучения темы у учащихся формируется представление о площади многоугольника как о некоторой величине, характеризующей фигуру. Понятие «площадь» вводится аксиоматически с указанием ее свойств и с опорой на наглядные представления и жизненный опыт учащихся. Вычисление площадей многоугольников является составной частью задач на многогранники в курсе стереометрии. Поэтому основное внимание уделяется формированию практических навыков вычисления площадей многоугольников в ходе решения задач.

Кроме того, в этом параграфе доказывается нетрадиционная для курса планиметрии теорема об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу. Однако следует заметить, что такая теорема присутствует и в учебнике И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7–9»[1]. Эта теорема играет важную роль при изучении подобия треугольников. Однако воспроизведения ее доказательства от всех учащихся можно не требовать.

Такое раннее введение понятия площади позволяет достаточно просто доказать теорему Пифагора, что, естественно, будет способствовать лучшему усвоению как самой теоремы, так и метода ее доказательства.

Доказательство теоремы Пифагора ведется с опорой на знание учащихся свойств площадей. В ознакомительном порядке рассматривается и теорема, обратная теореме Пифагора. Основное внимание уделяется решению задач, что не только позволяет расширить представления учащихся об аналитических методах решения геометрических задач и подготовить их к решению прямоугольных треугольников, но и играет важную роль в осуществлении внутрипредметных связей.

---

[1] И.Ф. Шарыгин. Геометрия. 7–9. М: Изд. Дрофа, 2012 г.

Планируемые итоговые результаты изучения главы VI. Учащиеся должны научиться:

- описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок, соотносить чертеж и текст;
- выделять на чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для решения задачи;
- иллюстрировать и объяснять основные свойства площади, понятие равновеликости и равносоставленности;
- выводить формулы площади треугольника: традиционную ($S = \frac{1}{2} a h_a$) и Герона ($\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$);
- выводить формулы площади четырехугольников: квадрата, у которого длина стороны выражается рациональным числом, прямоугольника, параллелограмма, ромба и трапеции;
- иллюстрировать и доказывать теорему Пифагора;
- вычислять площади фигур, непосредственно применяя свойства и формулы площади;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ основные свойства площади;
  - ➢ понятие равновеликости и равносоставленности;
  - ➢ формулы площади треугольников и четырехугольников;
  - ➢ теорему Пифагора.

Учащиеся получат возможность научиться:

- иллюстрировать и доказывать теорему, обратную теореме Пифагора;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ метод площадей;
  - ➢ теорему, обратную теореме Пифагора.

§1. Площадь многоугольника (1 ч)

Комментарий для учителя

Материал темы «Измерение геометрических величин», раздел «Площадь плоских фигур», определяемый стандартом образования как обязательный, в данном параграфе составляет только его часть: основные свойства площади и формула площади прямоугольника. Уровень сложности доказательства третьего свойства площади превышает уровень сложности учебного материала, определяемый стандартом образования, однако его появление вызвано объективными требованиями строгости обоснования утверждений. Все вышесказанное позволяет рекомендовать весь материал параграфа дать в обзорном плане в виде лекции на одном уроке. При этом основное внимание уделить непосредственно основным свойствам площади и формуле площади прямоугольника.

Текущие результаты изучения § 1. Учащиеся должны научиться:

- иллюстрировать и объяснять основные свойства площади, понятие равновеликости и равносоставленности;
- выводить формулы площади квадрата, у которого длина стороны выражается рациональным числом, и прямоугольника;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - основные свойства площади;
  - понятие равновеликости и равносоставленности;
  - формулу площади прямоугольника;
  - алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Материал, представленный в данном параграфе, сложен для восприятия учащихся, поэтому наиболее оптимальным методом его подачи является лекция, прерываемая краткими беседами с учащимися. Однако весь материал параграфа рекомендуется полностью изложить учителю самому. Можно предложить примерный план изложения.

$\boxed{1.}$ Учащимся полезно напомнить, что можно измерить любой отрезок, выбрав единицу измерения, т.е. выразить его длину некоторым положительным числом. Аналогично измеряется площадь. При этом за единицу измерения выбирается площадь квадрата со стороной, равной выбранной единице измерения длины, т.е. если за единицу измерения выбран сантиметр, то единицей измерения площади будет квадратный сантиметр и т.д. (рис. 55).

Площадь также всегда выражается положительным числом.

длина	площадь
см	$см^2$
мм	$мм^2$
м	$м^2$

Рис. 55

2. В соответствии с текстом учебника показать сложность измерения площади многоугольника с помощью укладки квадра-

3. Мотивация необходимости уметь по данным линейным элементам вычислять площади реальных объектов с помощью формул.

Полезно привести ряд примеров, связанных с практической необходимостью измерения площадей. Площадь поверхности стен в помещении нужно знать, чтобы рассчитать количество краски, обоев или кафеля. Площадь поля необходимо знать для определения количества семян для посева.

4. Введение *свойств измерения площадей* полезно проводить с одновременным повторением формулировок *свойств измерения отрезков*, сделав при этом рисунок и соответствующую запись на доске (рис. 56). Видимые из рисунков аналогии помогают более глубокому усвоению изучаемого материала. По рисунку 56 можно изготовить плакат.

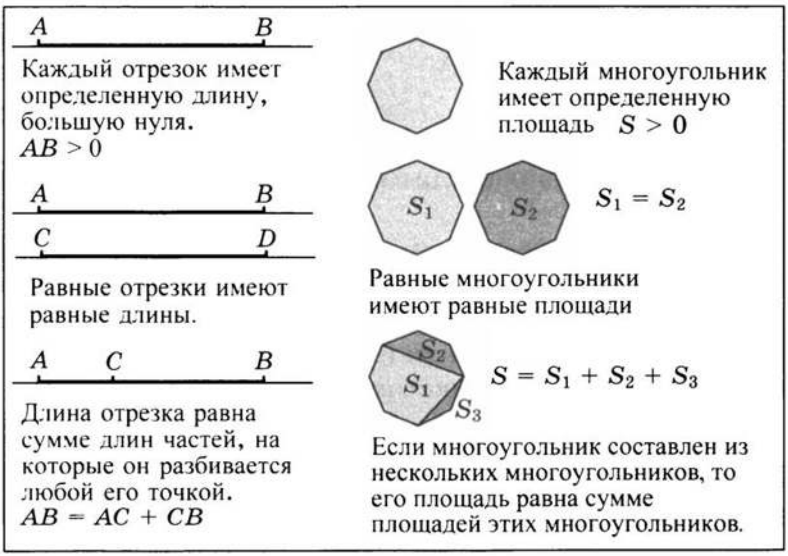


Рис. 56

После введения первых двух *свойств площади* полезно фронтально решить задачу **447** и на ее решении показать применение *свойств площади*.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировки первого и второго ***свойства площади****. Затем разобрать по тексту рабочей тетради решение задачи 88 (447 учебника).*

$\boxed{5.}$ Третье свойство площади *«площадь квадрата равна квадрату его стороны»* формулируется в пункте 49, а доказывается в пункте 50. Его доказательство трудно, и такой уровень сложности не соответствует требованиям образовательного стандарта. Поэтому вполне достаточно ограничиться при введении этого свойства доказательством случая, когда сторона квадрата выражается обыкновенной дробью или конечной десятичной дробью. Однако для сильных учащихся будет полезно разобрать доказательствои в случае, когда сторона квадрата выражается бесконечной десятичной дробью. Это позволит им познакомиться с использованием метода предельного перехода. Однако употреблять этот термин на данном этапе обучения не следует.

После введения третьего свойства площади полезно устно выполнить следующие упражнения:

Как изменится площадь квадрата, сторона которого равна 3 см, если каждую его сторону: а) увеличить в два раза; б) уменьшить в два раза?

Как изменится сторона квадрата, если его площадь: а) увеличить в 16 раз; б) уменьшить в 9 раз?

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку третьего ***свойства площади****. Затем устно выполнить упражнения 89–91.*

2°. При выводе *формулы для вычисления площади прямоугольника* используется равенство двух прямоугольников. Поэтому перед доказательством *формулы для вычисления площади прямоугольника* можно предложить учащимся задачу:

Докажите, что два прямоугольника с равными сторонами равны.

На прямое применение *формулы площади прямоугольника* можно предложить учащимся выполнить упражнения 452 а), г), 453 и решить задачу 457.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулу ***площади прямоугольника*** *и выполнить устно упражнения 92 (453 учебника) и 93 (457 учебника) и решить задачу 94.*

Примерное планирование изучения материала

На уроке: в классе — рассмотреть весь теоретический материал §1, решить задачи 447, 452 а) и г), 453 и 457; дома —вопросы 1–4 из вопросов для повторения к главе VI, задачи 448, 449 а), 450 а) и в), 454 б), 458.

Указания к задачам

В задачах 447 и 448 речь идет о понятии равновеликих фигур, и учащимся полезно пояснить, что *две фигуры называются равновеликими, если они имеют равные площади*. Термин *равновеликие фигуры* довольно часто встречается в литературе, адресованной учащимся старших классов.

Дополнительные задачи

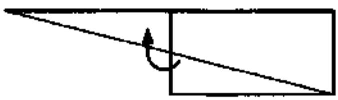


Рис. 57

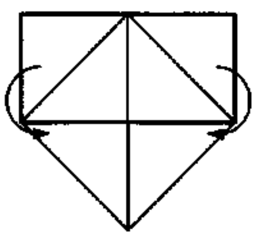


Рис. 58

1. (Практическая работа.) Вырежьте из бумаги два равных прямоугольника, у каждого из которых одна сторона вдвое больше другой. Один из них разрежьте на две части так, чтобы из них можно было составить прямоугольный треугольник. Другой разрежьте на три части так, чтобы из них можно было составить квадрат (рис. 57 и 58).

2. Стороны двух квадратов равны 8 см и 15 см. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна сумме площадей данных квадратов.

§2. Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции (5 ч)

Комментарий для учителя

В параграфе традиционными приемами выводятся основные формулы для вычисления площади параллелограмма, треугольника и трапеции.

Текущие результаты изучения § 2. Учащиеся должны научиться:

- выводить традиционную формулу площади треугольника: ($S = \frac{1}{2} a h_a$);
- выводить формулы площади четырехугольников;
- вычислять площади фигур, непосредственно применяя свойства и формулы площади;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ формулы площади треугольников и четырехугольников;
  - ➢ алгебраический аппарат.

Учащиеся получат возможность научиться:

- применять при решении задач на вычисления и доказательство метод площадей.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. При выводе формулы *площади параллелограмма* целесообразно после формулировки теоремы и выполнения рисунка параллелограмма записать формулу $S = ah_a$, используя общепринятые обозначения: a — основание, h_a — высота, проведенная к основанию a (рис. 59).

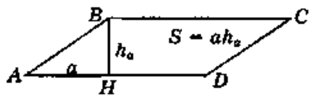


Рис. 59

Затем из формулировки теоремы выделить условие и заключение теоремы и сделать краткую запись.

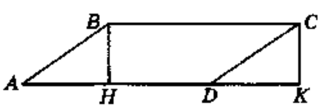


Рис. 60

Дано: $ABCD$ — параллелограмм.
$BH \perp AD$; $H \in AD$;

Доказать: $S_{ABCD} = AD \cdot BH$.

В ходе проведения доказательства полезно сделать краткую запись на доске.

1. Дополнительное построение: $CK \perp AD$. $ABCK$ — трапеция (рис. 60).

2. $S_{ABCK} = S_{ABH} + S_{BCKH} = S_{ABCD} + S_{DCK}$ (по *второму свойству площади*).

3. $ABCD$ — параллелограмм: $AD = BC$, $AB = DC$ и $AB \parallel DC$.

4. $\angle BAH = \angle CDK$ как соответственные углы при параллельных прямых AB и DC и секущей AD.

5. $\Delta BAH = \Delta CDK$ как прямоугольные треугольники по острому углу и гипотенузе.

6. $S_{ABH} = S_{DCK}$ (по *первому свойству площади*).

7. Значит, $S_{ABH} + S_{BCKH} = S_{ABCD} + S_{DCK}$, $S_{BCKH} = S_{ABCD}$.

8. $S_{BCKH} = BH \cdot BC = BH \cdot AD = S_{ABCD}$.

Вывод: $S_{ABCD} = BH \cdot AD$.

Для формирования умения применять формулу *площади параллелограмма* можно предложить учащимся устно выполнить задания **459** а), б) и г), **464**, **467** из учебника.

Для лучшего усвоения формулы *площади параллелограмма* и умения применять ее в ситуациях, несколько отличных от стандартных, полезно предложить учащимся решить следующую задачу:

> Дан параллелограмм $ABCD$ с основанием AD. Постройте параллелограмм на том же основании AD, равновеликий данному параллелограмму, но не равный ему. Сколько таких параллелограммов можно построить? (Две другие вершины нового параллелограмма будут лежать на прямой, содержащей сторону BC. Как угодно много.)

Если позволит время, полезно письменно решить следующую задачу с опорой на задачу **464** из учебника:

> Докажите, что стороны параллелограмма обратно пропорциональны соответствующим высотам.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулу* площади параллелограмма *и выполнить упражнения* ***95–97****. Задачи* ***96*** *и* ***97*** *дублируют вышеприведенные задачи. Поскольку в начале следующего урока предполагается самостоятельная работа по теме* «Площадь прямоугольника. Площадь параллелограмма», *то полезно решить задачу* ***98****.*

2°. При выводе формулы *площади треугольника* целесообразно после формулировки теоремы и выполнения рисунка треугольника

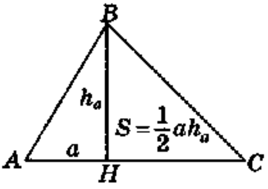


Рис. 61

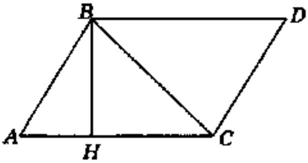


Рис. 62

записать формулу $S = \frac{1}{2} a\, h_a$, используя общепринятые обозначения: a — основание, h_a — высота, проведенная к основанию a (рис. **61**).

Затем из формулировки теоремы выделить условие и заключение теоремы и сделать краткую запись.

Дано: ABC — треугольник;
AC — основание;
BH — высота.

Доказать: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$

В ходе проведения доказательства полезно сделать краткую запись на доске.

1. Дополнительное построение: $BD \parallel AC$ и $AB \parallel DC$. $ABCD$ — параллелограмм (рис. **62**).

2. $ABCD$ — параллелограмм: $AC = BD$, $AB = DC$.

3. $\Delta ABC = \Delta BCD$ по трем сторонам.

4. $S_{ABC} = S_{BCD}$ (по *первому свойству площади*).

5. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{BCD}$ (по *второму свойству площади*).

6. Значит, $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.

<u>Вывод</u>: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.

Для формирования <u>умения</u> применять формулу *площади треугольника* можно предложить учащимся устно выполнить задания **468** а), в) и г) из учебника.

Для лучшего усвоения формулы *площади треугольника* и формирования умения применять ее в ситуациях, несколько отличных от стандартных, полезно предложить учащимся решить задачу **473** из учебника.

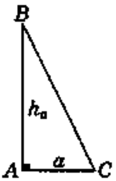


Рис. 63

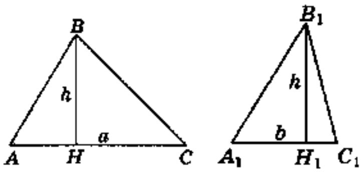


Рис. 64

Доказательства <u>следствий 1 и 2</u> можно обсудить с учащимися фронтально по готовым чертежам (рис. **63** и **64**) и закрепить в ходе устного решения задач **471** а) (<u>следствие 1</u>) и **474** (<u>следствие 2</u>).

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулу* площади треугольника. *На применение следствия 1 можно решить задачу **101**, а на применение следствия 2 — упражнение **99**.*

3°. На уроке, который планируется посвятить изучению теоремы об *отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу*, при проверке домашнего задания следует обратить внимание на задачу **475** и формулировку следствия 2. Затем можно предложить учащимся выполнить следующую задачу:

Разделите данный треугольник на два треугольника, площади которых относятся как 1 : 2.

> *В рабочей тетради предложить учащимся посмотреть решение задачи **99**, выполненное при изучении формулы площади треугольника, и решить задачу **100**.*

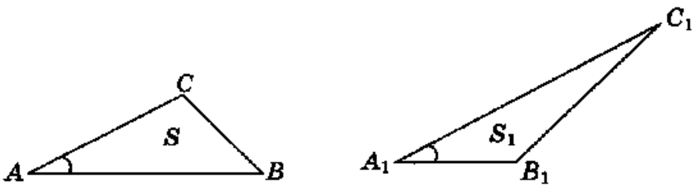


Рис. 65

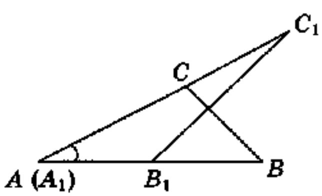


Рис. 66

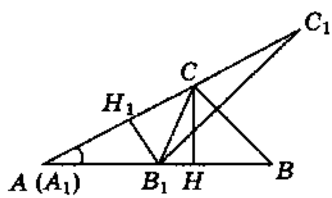


Рис. 67

Доказательство теоремы об *отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу*, целесообразно начать с формулировки теоремы и выполнения рисунка 65 по ее условию. Затем провести анализ формулировки теоремы, выделив условие (ABC и $A_1B_1C_1$ — треугольники, S — *площадь* треугольника ABC, S_1 — *площадь* треугольника $A_1B_1C_1$) и заключение (*площадь* треугольника ABC относится к *площади* треугольника $A_1B_1C_1$ как произведение $AB \cdot AC$ относится к произведению $A_1B_1 \cdot A_1C_1$).

Затем сделать краткую запись условия теоремы.

Дано: ABC и $A_1B_1C_1$ — треугольники;
S — *площадь* треугольника ABC;
S_1 — *площадь* треугольника $A_1B_1C_1$;
$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$

Доказать: $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$

Доказательство можно провести по следующему плану. При этом рекомендуется сделать краткую запись на доске и в тетрадях учащихся.

1. Дополнительное построение: наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы вершина A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ совпала с вершиной A треугольника ABC, а луч A_1B_1 — с лучом AB. Так как углы $B_1A_1C_1$ и BAC равны и отложены от полупрямой A_1B_1 в одну полуплоскость, то луч A_1C_1 совпадает с лучом AC (рис. **66**). Значит, точка C_1 лежит на луче AC.

2. Дополнительное построение: соединим вершину C треугольника ABC с вершиной B_1 треугольника AB_1C_1 (рис. **67**).

3. Рассмотрим треугольники ACB и ACB_1. CH — высота треугольников ACB и AB_1C (рис. **66**). Значит, по следствию **2**: $\dfrac{S}{S_{AB_1C}} = \dfrac{AB}{AB_1}$.

4. Рассмотрим треугольники AB_1C_1 и AB_1C. CH — высота треугольников ACB и AB_1C_1 (рис. **66**). Значит, по следствию **2**: $\dfrac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \dfrac{AC}{AC_1}$

5. Отсюда: $\dfrac{S}{S_{AB_1C}} \cdot \dfrac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \dfrac{AB}{AB_1} \cdot \dfrac{AC}{AC_1}$.

6. $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB_1C_1$, а значит, $S_1 = S_{AB_1C_1}$.

<u>Вывод</u>: $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$.

Для закрепления сформулированного в теореме свойства площадей треугольников можно решить задачу **479** а).

4°. При выводе формулы *площади трапеции* целесообразно после формулировки теоремы и выполнения рисунка трапеции записать формулу $S = \frac{1}{2}(a+b)h$, используя общепринятые обозначения: a и b — основания, h — высота, проведенная к основаниям (рис. 68). Затем из формулировки теоремы выделить условие и заключение теоремы и сделать краткую запись.

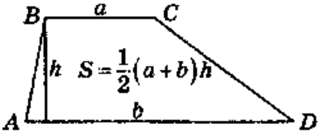


Рис. 68

Дано: $ABCD$ — трапеция.

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)h$.

Доказательство формулы *площади трапеции* аналогично доказательству формул *площадей параллелограмма* и *треугольника*, поэтому можно предложить учащимся разобрать его самостоятельно.

В рабочей тетради предложить учащимся записать формулу площади трапеции.

Для формирования умения применять формулу *площади трапеции* можно предложить учащимся устно по готовому чертежу выполнить задания **480** а) и б) из учебника и задачу **2** из дополнительных задач методического пособия.

5°. В результате решения задач **476–478** получаем еще дополнительные формулы вычисления площадей для выпуклых четырехугольников по заданным диагоналям, если эти диагонали перпендикулярны. Задача **478** является обобщением (утверждением в общем случае) задачи **476** из учебника и задачи **1** и **2** из дополнительных задач методического пособия. Представляется полезным решить эти задачи в классе.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся решить задачи **103** и **104** после решения задачи **476**, которые дублируют задачи **1** и **2** из дополнительных задач методического пособия.*

6°. На пятом уроке рекомендуется провести повторение темы «*Площадь*». Для этого можно использовать плакат такого типа, как на рисунке **69**. Можно предложить учащимся сделать аналогичную таблицу в тетради. Затем устно по готовому чертежу решить задачу **3** из дополнительных задач методического пособия и, если позволит время, решить задачи **461, 509, 515**.

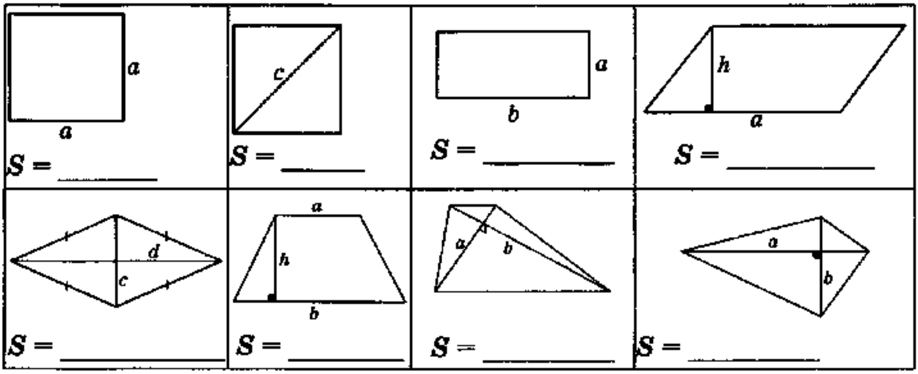


Рис. 69

Повторение темы «Площадь» можно провести при выполнении задания 105, которое является полным аналогом работы с плакатом, но не требует от учителя значительных затрат времени на изготовление плаката. Кроме того, наличие рабочей тетради позволяет сэкономить время на уроке, при этом сделанные записи помогут учащимся в дальнейшем при повторении, как тематическом, так и итоговом.

Затем выполнить задание 106 с краткой записью решения. Заметим, что задание 106 дублирует задачу 3 из дополнительных задач методического пособия.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе проверку домашнего задания провести в форме самостоятельной работы по теме «Площадь многоугольника»; рассмотреть весь теоретический материал пункта 52, решить задачи 459 а), б) и г), 464 и 467; дома — вопрос 5 из вопросов для повторения к главе VI, задачи 460, 462, 466.

На втором уроке в классе рассмотреть теорему о площади треугольника и следствия из нее, решить задачи 468 а), в) и г), 471 а), 473 и 474; дома — вопрос 6 из вопросов для повторения к главе VI, задачи 470, 472, 475.

На третьем уроке в классе — рассмотреть доказательство теоремы об *отношении площадей треугольников, имеющих по рав-*

ному углу, решить задачу 479 а); дома — вопрос 7 из вопросов для повторения к главе VI, задачи 469, 471 б) и 479 б).

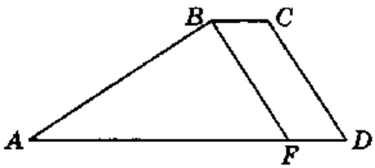
На четвертом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 54, решить задачи 476 а), 478 и 480 а) и б), задачи 1, 2 из дополнительных задач методического пособия; дома — вопрос 8 из вопросов для повторения к главе VI, задачи 477, 481 и 482.

На пятом уроке в классе — провести повторение темы *«Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции»*, решить задачи 461, 509, 515, провести самостоятельную работу по теме «Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции»; дома — вопросы 10–13 из вопросов для повторения к главе IV, задачи 261 и 263.

Самостоятельная работа по теме «Площадь многоугольника»

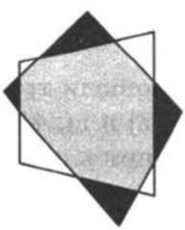
Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант



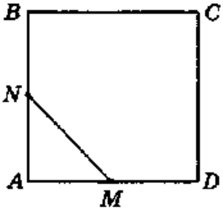
1. В трапеции $ABCD$ отрезок BF параллелен стороне CD и отсекает от нее параллелограмм $FBCD$. Определите площадь треугольника ABF, если площадь трапеции равна 40 см^2, а площадь параллелограмма $FBCD$ — 8 см^2.

Ответ: 1) 56 см^2; 2) 14 см^2; 3) 32 см^2; 4) 16 см.



2. Два равновеликих четырехугольника расположены так, как показано на рисунке. Сумма площадей черных треугольников равна S_1, а сумма площадей белых треугольников равна S_2. Сравните S_1 и S_2.

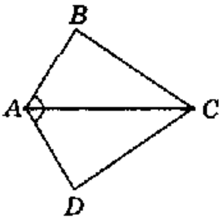
Ответ: 1) $S_1 < S_2$; 2) $S_1 = S_2$; 3) $S_1 > S_2$



3. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отмечены точки N и M. Точка N делит сторону AB пополам, а точка M делит сторону AD в отношении $1 : 3$, считая от вершины A. Определите, какую часть площади квадрата $ABCD$ составляет площадь треугольника ANM.

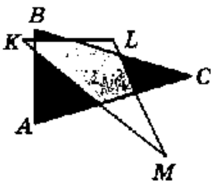
Ответ: ____________________

2-й вариант



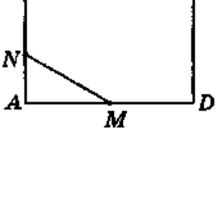
1. В четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC, которая является биссектрисой противолежащих углов BAD и BCD. Площадь треугольника ABC равна 28 см^2. Определите площадь четырехугольника $ABCD$.

Ответ: 1) 56 см^2; 2) 14 см^2; 3) 28 см^2; 4) 42 см^2.



2. Два треугольника ABC и KLM расположены так, как показано на рисунке. Площадь треугольника ABC больше площади треугольника KLM. Сумма площадей черных треугольников равна S_1, а сумма площадей белых треугольников равна S_2. Сравните S_1 и S_2.

Ответ: 1) $S_1 < S_2$; 2) $S_1 = S_2$; 3) $S_1 > S_2$.



3. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ отмечены точки N и M. Точка N делит сторону AB в отношении $1 : 4$, считая от вершины A, а точка M делит сторону AD пополам. Определите, какую часть площади квадрата $ABCD$ составляет площадь треугольника ANM.

Ответ: ____________________

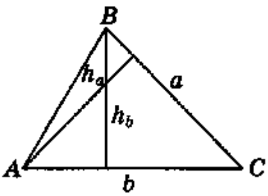
Самостоятельная работа по теме «Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант

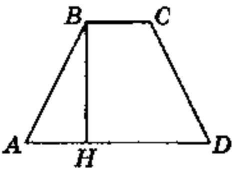
1. Площадь ромба равна 40 см^2, а его периметр равен 20 см. Найдите высоту ромба.

Ответ: 1) 2 см; 2) 8 см; 3) 4 см.



2. В треугольнике ABC к стороне a проведена высота h_a, а к стороне b проведена высота h_b. Сравните длины высот h_a и h_b, если $a > b$.

Ответ: 1) $h_a < h_b$; 2) $h_a = h_b$; 3) $h_a > h$.



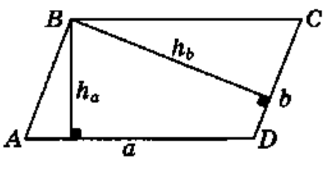
3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ периметр равен 42 см, боковая сторона равна 10 см. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 8 см.

Ответ: ______________________________

2-й вариант

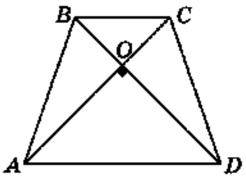
1. Площадь треугольника равна 18 см^2. Найдите высоту треугольника, нроведенную к стороне длиной 6 см.

Ответ: 1) 9 см; 2) 6 см; 3) 3 см;



2. В параллелограмме $ABCD$ к стороне a проведена высота h_a, а к стороне b проведена высота h_b. Сравните длины высот h_a и h_b, если $a > b$.

Ответ: 1) $h_a<h_b$; 2) $h_a = h_b$; 3) $h_a>h_b$.



3. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если диагональ AC равна 6 см.

Ответ: ______________________

Указания к задачам

В задачах **461**, **462**, **463** и **465** используется свойство прямоугольного треугольника, у которого один угол равен 30° (глава IV §3 пункт 35).

В задаче **466** важно выяснить:

1) какую рассматривать диагональ параллелограмма — большую или меньшую;

2) какой стороне данная диагональ равна — большей или меньшей (рис. 72).

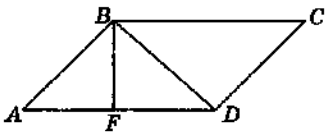


Рис. 72

1. По условию диагональ равна стороне, большая диагональ лежит против тупого угла и, следовательно, больше каждой из сторон параллелограмма.

2. Предположим, что диагональ BD равна большей стороне DC, тогда в треугольнике BDC: $\angle BCD = \angle BDC = 45°$, значит, $\angle DBC = 90°$, а в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета. Значит, предположение неверно и диагональ равна меньшей стороне параллелограмма. Отсюда треугольник — прямоугольный, равнобедренный, и, значит, BF — высота треугольника равна половине основания AD. Далее применяется формула площади параллелограмма.

Задача **473**. Все треугольники имеют равные площади, так как имеют общие основание и равные высоты — расстояние между параллельными прямыми.

Для решения задачи **475** достаточно отрезок BC разделить на три равные части и соединить точки деления с вершиной A. Полученные треугольники равновелики, так как имеют равные основания и общую высоту.

В задаче 481 важно выяснить, о каких двух меньших сторонах идет речь. Два основания трапеции не равны, значит, одно основание больше другого. Так как трапеция — прямоугольная, то одна боковая сторона больше другой, причем меньшей стороной является сторона, перпендикулярная основаниям, что следует из свойств перпендикуляра и наклонной. Значит, две меньшие стороны — это сторона, перпендикулярная основаниям трапеции, и меньшее основание трапеции.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали.

2. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 14 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

3. Найдите площади заштрихованных фигур, используя данные рисунков **73, 74** и **75**.

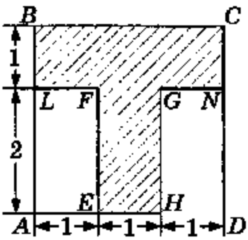


Рис. 73

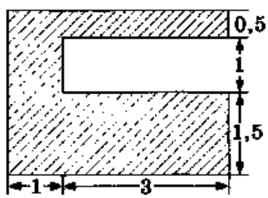


Рис. 74

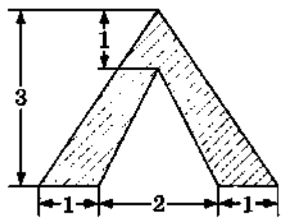


Рис. 75

§3. Теорема Пифагора (3 ч)

Комментарий для учителя

В параграфе рассматривается материал, традиционный для любого курса планиметрии, — теорема Пифагора и в ознакомительном порядке теорема, обратная теореме Пифагора. Доказательство теоремы Пифагора ведется с опорой на знания учащихся о свойствах площади. Теоретический материал этого параграфа широко применяется при решении самых разнообразных геометрических задач. Поэтому основное внимание уделяется решению задач. Как теорема Пифагора, так и формула Герона позволяют расширить представления учащихся об алгебраических методах решения геометрических задач и играют важную роль в осуществлении внутрипредметных связей.

Текущие результаты изучения § 3. Учащиеся должны научиться:
- описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок, соотносить чертеж и текст;
- выделять в чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для решения задачи;
- выводить формулу Герона площади треугольника;
- иллюстрировать и доказывать теорему Пифагора;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ формулу Герона;
  - ➢ теорему Пифагора.

Учащиеся получат возможность научиться:
- *иллюстрировать и доказывать теорему, обратную теореме Пифагора;*
- *применять при решении задач на вычисления и доказательство теорему, обратную теореме Пифагора.*

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Изучение *теоремы Пифагора* начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка **76**. Сначала необходимо обратить внимание учащихся на то, что в формулировке теоремы есть ровно одно условие (ABC — прямоугольный треугольник), и этого условия достаточно, чтобы выразить гипотенузу через катеты.

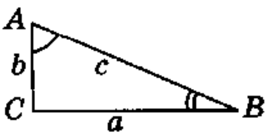


Рис. 76

Дано: ABC — прямоугольный треугольник;

$\angle C$ — прямой

Доказать: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Обозначим длины сторон треугольника $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Сначала выполняется дополнительное построение: строится квадрат со стороной, равной сумме длин катетов — $a + b$ (рис. **77**).

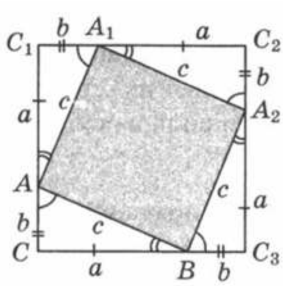


Рис. 77

Доказательство теоремы, как правило, не вызывает трудностей у учащихся. Поэтому можно провести его в форме фронтальной беседы по следующей схеме.

1. Чему равна площадь квадрата $CC_1C_2C_3$?

$S_{CC_1C_2C_3} = (a+b)^2$ (рис. 77).

2. Почему треугольники: ABC, AC_1A_1, $A_1C_2A_2$ и A_2C_3B равны?

Треугольники — прямоугольные, $AC, = C_1A_1 = C_2A_2 = C_3B = b$, $BC = AC_1 = A_1C_2 = A_2C_3 = a$. Значит, прямоугольные треугольники равны по двум катетам (рис. 77).

3. Почему $\angle BAA_1 = \angle AA_1A_2 = \angle A_1A_2B = \angle A_2BA = 90°$?

Рассмотрим $\angle AA_1A_2$: $\angle C_1A_1C_2$ — развернутый, $\angle CA_1A + \angle A_2A_1C_2 = 90°$ как сумма острых углов прямоугольного треугольника. Значит, $\angle AA_1A_2 = 90°$ (рис. 77).

4. Чему равна площадь прямоугольного треугольника ABC?

$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab$ (рис. 76).

5. Определите вид четырехугольника AA_1A_2B.

Четырехугольник AA_1A_2B — квадрат ($AA_1 = A_1A_2 = A_2B = AB = c$ как гипотенузы равных прямоугольных треугольников; $\angle BAA_1 = \angle AA_1A_2 = \angle A_1A_2B = \angle A_2BA = 90°$).

6. Чему равна площадь квадрата AA_1A_2B?

$S_{AA_1A_2B} = c^2$ (рис. 77).

7. Из каких фигур составлен квадрат $CC_1C_2C_3$?

Четыре равных прямоугольных треугольника: ABC, AC_1A_1, $A_1C_2A_2$, и A_2C_3B и квадрат AA_1A_2B (рис. 77).

8. Запишите площадь квадрата $CC_1C_2C_3$ в виде суммы площадей составляющих его фигур. $S_{CC_1C_2C_3} = 4\,S_{ABC} + S_{AA_1A_2B}$.

<u>Вывод</u>: Отсюда $(a+b)^2 = 4\cdot\frac{1}{2}ab + c^2$, $c^2 = a^2 + b^2$.

Для формирования <u>умения</u> применять *теорему Пифагора* можно предложить учащимся устно выполнить задания 483 а), 484 а) и г), 486 а) и с оформлением в тетради задачу 487 из учебника.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку

теоремы Пифагора, проиллюстрировать ее на чертеже и выполнить задачи 107–109.

2*. Теорема, обратная *теореме Пифагора*, не является обязательной к изучению, поэтому, в каком объеме давать данный материал, учитель определяет сам.

Перед доказательством теоремы, обратной *теореме Пифагора*, полезно с использованием известных примеров напомнить учащимся понятия прямой и обратной теорем. С этой целью можно сделать плакат, как на рисунке 78. При этом следует еще раз обратить их внимание на то, что всегда условие *прямой* теоремы *«...накрест лежащие углы равны...»* в *обратной* теореме является заключением, а заключение *прямой* теоремы *«...прямые параллельны»* в *обратной* теореме является условием. *Прямая* и *обратная* теоремы взаимно обратные.

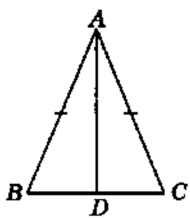
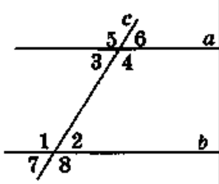
Прямая теорема		Обратная теорема
В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Дано: ΔABC — равнобедренный; AB — основание Доказать: $\angle A = \angle B$		*Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.* Дано: ΔABC; $\angle A = \angle B$ Доказать: ΔABC — равнобедренный
Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Дано: $\angle 1 = \angle 4$ Доказать: $a \parallel b$		*Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны.* Дано: $a \parallel b$ Доказать: $\angle 1 = \angle 4$
Если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны. Дано: $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ Доказать: $a \parallel b$		*Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны.* Дано: $a \parallel b$ Доказать: $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$

Рис. 78

Заметим, что справедливость прямой теоремы не всегда означает справедливость обратной теоремы. Например, прямая теорема *«Вертикальные углы равны»*. Условие *«Вертикальные углы...»*, заключение *«...углы равны»*. Сформулируем обратную теорему: *«Если углы равны, то они вертикальные»*, что неверно.

После этого можно предложить учащимся сформулировать теорему, обратную *теореме Пифагора*.

3°. Доказательство теоремы достаточно сложное, поэтому можно посоветовать провести его учителю без привлечения учащихся по следующему плану.

Начать доказательство теоремы, обратной *теореме Пифагора*, целесообразно с формулировки теоремы и выполнения рисунка 79 по ее условию. Затем провести анализ формулировки теоремы, выделив условие (ABC — треугольник, $AB^2 = AC^2 + BC^2$) и заключение (ΔABC — прямоугольный), сделать краткую запись условия теоремы.

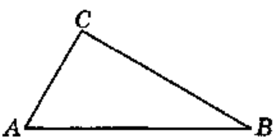


Рис 79

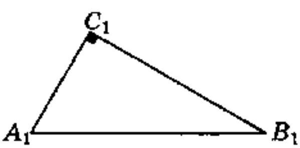


Рис. 80

Дано: ABC — треугольник,
$AB^2 = AC^2 + BC^2$

Доказать: $\angle C$ — прямой.

1. Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$: $C_1B_1 = CB$, $A_1C_1 = AC$, $\angle C_1$ – прямой (рис. 80).
2. Для треугольника $A_1B_1C_1$ по *теореме Пифагора* $A_1B_1{}^2 = A_1C_1{}^2 + B_1C_1{}^2 = AC^2 + BC^2$.
3. Для треугольника ABC по условию $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
4. $A_1B_1{}^2 = AB^2$.
5. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по трем сторонам.
6. В равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ против равных сторон лежат равные углы, значит, $\angle C = \angle C_1$.

Вывод: Треугольник ABC — прямоугольный.

Поскольку данная теорема идет в ознакомительном плане, то от всех учащихся можно не требовать воспроизведения ее доказательства.

На прямое применение теоремы, обратной *теореме Пифагора*, можно предложить учащимся выполнить с краткой записью задания 498 а), д) и е).

4°. Вывод формулы Герона опирается на теорему о сумме углов треугольника и теорему Пифагора, при этом применяется алгебраический аппарат.

Вывод формулы Герона рекомендуется провести учителем без привлечения учащихся.

На применение формулы Герона рекомендуется решить задачу 499 а) из учебника.

5°. Третий урок посвятить решению задач по теме: «*Теорема Пифагора*» и провести самостоятельную работу по той же теме.

В самостоятельное работе первые две задачи — это задачи с выбором ответа. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В третьей задаче решение записывается полностью с записью условия задачи.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради на уроке решения задач по теме «Теорема Пифагора» можно решить задачи 110–115, в этих задачах рассматриваются различные геометрические ситуации, связанные с ранее изученными фигурами.*

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 55 и 56, решить устно задачи 483 а), 484 г), 486 а) 489 а) (письменно), 498 а) и е); дома — вопросы 9–11 из вопросов для повторения к главе VI, задачи 483 в) и г), 484 д), 488, 489 в) и 498 б), г).

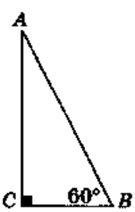
На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 57, решить задачи 491 а), 492, 493 и 499 а); дома — вопрос 12 из вопросов для повторения к главе VI, задачи 491 б), 494, 495 а).

На третьем уроке в классе — урок решения задач, провести самостоятельную работу по теме «Теорема Пифагора»; дома — подбор задач для урока и задания на дом по усмотрению учителя.

Самостоятельная работа по теме «Теорема Пифагора»

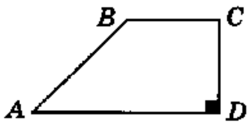
Самостоятельная работа планируется на 20 мин.

1-й вариант



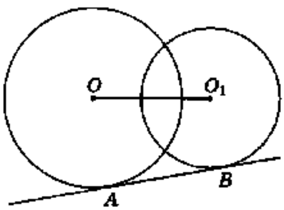
1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см, а острый угол равен 60°. Найдите катет, противолежащий данному углу.

Ответ: 1. $5\sqrt{3}$ см; 2. $5\sqrt{5}$ см; 3. 5 см; 4. 3 см.



2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ основания равны 17 см и 9 см, а меньшая боковая сторона равна 15 см. Найдите сторону AB.

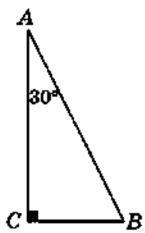
Ответ: 1) 15 см; 2) 17 см; 3) 9 см; 4) 8 см.



3. К двум окружностям с центрами в точках O и O_1 и радиусами, равными 12 см и 4 см, проведена касательная AB. Найдите расстояние между центрами окружностей, если отрезок касательной AB равен 15 см.

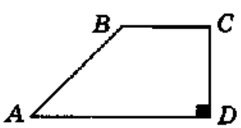
Ответ: ______________________________

2-й вариант



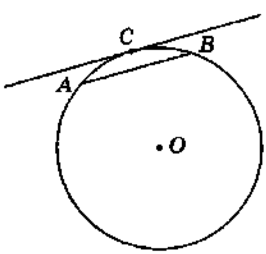
1. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен $5\sqrt{3}$ см. Найдите второй катет, если угол, прилежащий к данному катету, равен 30°.

Ответ: 1. $5\sqrt{\frac{3}{2}}$ см; 2. $2\sqrt{15}$ см; 3. 5 см; 4. 10 см.



2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D$ — прямой) основания равны 21 см и 16 см, а боковая сторона AB равна 13 см. Найдите меньшую сторону трапеции.

Ответ: 1) 12 см; 2) 13 см; 3) $\sqrt{194}$ см; 4) 5 см.



3. В окружности с диаметром 20 см проведена хорда, равная 12 см. Найдите расстояние от данной хорды до ближайшей параллельной ей касательной (C — точка касания).

Ответ: ______________________________

Дополнительные задачи

1. Найдите отношение диагонали квадрата к его стороне.

2. Основания равнобедренной трапеции равны 22 см и 42 см, боковая сторона — 26 см. Найдите диагонали трапеции.

3. В окружности с радиусом 17 см проведена хорда, равная 16 см. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

4. Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

5. Найдите площадь треугольника по трем сторонам: 1) 17, 65, 80; 2) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6.

6. В треугольнике со сторонами 30 см, 25 см и 11 см найдите длину высоты, проведенной из вершины меньшего угла.

7. Треугольник ABC, стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника. Найдите площадь треугольника BMC.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Площадь»

Комментарий для учителя

1°. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Площадь» учащиеся должны:

- по описанию ситуации выполнять чертеж, выделять на чертеже конфигурации, необходимые для решения задачи;
- *понимать*, в каких ситуациях применима теорема Пифагора;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ основные свойства площади;
  - ➢ понятие равновеликости и равносоставленности;

- формулы площади треугольников: традиционную ($S = \frac{1}{2}ah_a$) и Герона ($S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$) и — четырехугольников;
- теорему Пифагора;
- ранее изученные определения, признаки и свойства геометрических фигур;
- *применять* алгебраический метод решения при вычислении элементов фигур.

2°. Подготовку к контрольной работе по теме «Площадь» полезно организовать как урок решения задач. Для этого можно использовать нерешенные задачи из учебника, в ходе решения которых провести повторение по материалу параграфа. Кроме того, в зависимости от уровня подготовки класса, можно подобрать задачи из дополнительных задач из методического пособия, рекомендованные к соответствующим пунктам.

В сборнике тестов Т.М. Мищенко, А.Д. Блинкова «Геометрия. Тесты. 8 класс» к учебнику Л.С. Атанасяна и др. издательства «Просвещение» для главы VI «Площадь» рекомендованы тесты 7, 8 и 9, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Каждый тест имеет четыре варианта.

Повторение можно организовать несколькими способами.

Первый способ: итоговый тест по теме можно создать из тестов 7, 8 и 9, используя часть заданий из каждого теста. Следует заметить, что в зависимости от уровня класса, можно использовать или более легкие задания тестов, или более сложные. Полезно разобрать хотя бы одну из десяти задач теста 8, решение которых позволяет определить уровень сформированности логического мышления. Также можно разобрать и одну из десяти задач теста 9, решение которых требует достаточно высокой вычислительной культуры.

Второй способ: Поскольку тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно из каждого теста выполнить по одному варианту устно.

Первый способ более приемлемый, так как разбор заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся.

3°. В контрольной работе первые три задачи — это задачи с выбором ответа и с кратким ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 4 и 5 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

> *При использовании в учебном процессе рабочей тетради ее можно использовать как конспект темы и просмотреть решение опорных задач. Поскольку в рабочей тетради по каждому пункту темы дано избыточное число задач, то из нерешенных в процессе изучения темы задач можно сделать подборку для урока повторения.*

Контрольная работа по теме «Площадь» (1 ч)

1-й вариант

1. Площадь прямоугольника, в котором стороны относятся как 1 : 4, равна площади квадрата со стороной 6 см. Найдите большую сторону прямоугольника.

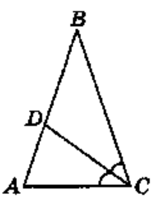
Ответ: ______________________

2. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5 см, а основание AD равно 9 см. Найдите высоту трапеции, если ее площадь равна 35 см^2.

Ответ: 1) 2 см; 2) 8 см; 3) 5 см.

3. В четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны. Из вершины C к стороне AD проведен перпендикуляр CF, его длина равна 12 см. Отрезок FD равен 5 см, а сторона AB равна 13 см. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

Ответ: ______________________



4. В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 5 см, угол ABC равен 36°. Найдите длину биссектрисы CD данного треугольника, если площадь треугольника ABC в два раза больше площади треугольника BDC.

5. В треугольнике ABC сторона AB равна 3 см, сторона AC равна 4 см, сторона BC равна 5 см. Найдите длину наименьшей высоты этого треугольника.

2-й вариант

1. В прямоугольнике $ABCD$ стороны равны 3 см и 8 см. Найдите меньшую сторону равновеликого ему прямоугольника, периметр которого равен 20 см.

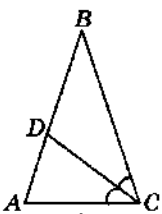
Ответ: ________________________

2. Площадь ромба равна 40 см^2, а его периметр равен 20 см. Найдите высоту ромба.

Ответ: 1) 2 см; 2) 8 см; 3) 4 см.

3. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны. Из вершины C к стороне AD опущен перпендикуляр CF, его длина равна 15 см. Отрезок FD равен 8 см, а сторона AB равна 17 см. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

Ответ: ________________________



4. В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 5 см, угол ABC равен 36°. Биссектриса CD треугольника равна 3 см. Найдите отношение площади треугольника DBC к площади треугольника ABC.

5. В треугольнике ABC сторона AB равна 25 см, сторона AC равна 7 см, сторона BC равна 24 см. Найдите длину наименьшей высоты этого треугольника.

ГЛАВА VII. ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ (16 ч)

Содержание главы составляет материал, являющийся традиционным для любого курса планиметрии: пропорциональные отрезки, подобие треугольников, признаки подобия треугольников, отношение площадей подобных треугольников, подобие произвольных фигур. Здесь же рассматриваются пропорциональные отрезки и тригонометрические функции острого угла (синус, косинус и тангенс) прямоугольного треугольника. С помощью подобия треугольников доказывается одно из важных свойств треугольников: теорема о средней линии треугольника.

Усвоение учащимися признаков подобия треугольников и формирование умения их применять являются одной из основных задач этой главы. И это не случайно, свойства подобных треугольников будут многократно применяться в дальнейших главах курса как планиметрии, так и стереометрии.

При изучении признаков подобия треугольников достаточно доказать два первых признака, так как первый признак доказывается с опорой на теорему об отношении площадей треугольников, имеющих равные углы, а доказательства двух других аналогичны и опираются на первый признак.

Значительную часть главы составляет тригонометрический материал. Вводятся определения синуса, косинуса и тангенса острого угла, прямоугольного треугольника. Учащиеся знакомятся с некоторыми свойствами тригонометрических функций, а именно: «*Если в двух прямоугольных треугольниках острые углы равны, то их косинусы, синусы и тангенсы также равны*». Кроме того, учащиеся знакомятся с основным тригонометрическим тождеством. Как и в любом курсе планиметрии, здесь выводятся значения тригонометрических функций углов 30°, 45° и 60°. Знание этих величин позволяет существенно упростить вычисления, поэтому целесообразно, чтобы учащиеся их запомнили.

Планируемые итоговые результаты изучения главы VII:

Учащиеся должны научиться:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках подобные треугольники, средние линии треугольников;
– выделять в конфигурации, данной в условии задачи, подобные треугольники, средние линии треугольников;

- формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему об отношении площадей подобных треугольников;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать признаки подобия треугольников;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему о средней линии треугольника;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о пропорциональных отрезках прямоугольных треугольников;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать свойство точки пересечения медиан;
- объяснять понятия: *подобия, коэффициента подобия* и *подобных треугольников*; *пропорциональных отрезков*;
- объяснять тригонометрические термины *«синус»*, *«косинус»*, *«тангенс»*, *оперировать* начальными понятиями тригонометрии;
- решать прямоугольные треугольники;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ признаки подобия треугольников;
  - ➢ теорему о средней линии треугольника;
  - ➢ теоремы о пропорциональных отрезках прямоугольных треугольников;
  - ➢ свойство точки пересечения медиан треугольника;
  - ➢ определения тригонометрических функций острого угла в прямоугольном треугольнике и тригонометрические тождества;
  - ➢ алгебраический аппарат;
- применять при решении задач на построение:
  - ➢ понятие подобия.

Выпускник получит возможность:

♦ *овладеть методом подобия решения задач на вычисления и доказательства;*

♦ *научиться решать задачи на построение методом геометрического места точек и методом подобия.*

§ 1. Пропорциональные отрезки (2 ч)

Комментарий для учителя

В данном параграфе рассматриваются два определения: *пропорциональные отрезки*, *подобные треугольники* и теорема *об отношении площадей подобных треугольников.* Понятия *про-*

порциональности и *отношения* различных величин традиционно вызывают у учащихся затруднения не только в геометрии, но и в алгебре, химии, биологии и т.д., поэтому представляется необходимым основное внимание уделить формированию практических умений и навыков по условию задачи производить записи *пропорциональности* и *отношения* отрезков.

Текущие результаты изучения параграфа 1. Учащиеся должны научиться:

- изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках подобные треугольники;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему *об отношении площадей подобных треугольников*;
- объяснять понятия: *подобия, коэффициента подобия* и *подобных треугольников*, *пропорциональных отрезков*;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ определения *подобия, коэффициента подобия, подобных треугольников и пропорциональных отрезков*;
  - ➢ теорему *об отношении площадей подобных треугольников*;
  - ➢ алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

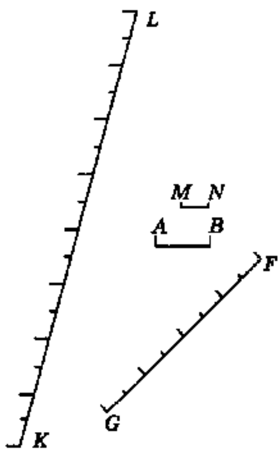


Рис. 81

1°. Понятие *пропорциональных отрезков* вводится на наглядном уровне. Для этого можно выполнить рисунок **81**. Рассмотрим отрезки KL и AB и отрезки GF и MN.
Отрезок KL равен восьми отрезкам AB, а GF равен восьми отрезкам MN, т.е. выполняется равенство $\dfrac{KL}{AB} = \dfrac{GF}{MN}$. Можно рассмотреть также отрезки KL и GF и отрезки AB и MN.

Отрезок KL равен двум отрезкам GF, а AB равен двум отрезкам MN, т.е. выполняется равенство $\dfrac{KL}{GF} = \dfrac{AB}{MN}$. Значит, отрезки KL и AB *пропорциональны отрезкам* GF и $M\ N$, а отрезки KL и GF пропорциональны отрезкам AB и MN.

При введении определения *пропорциональных отрезков* основное внимание учащихся необходимо направить на понимание того, что, если в условии сказано: «...*отрезок AB делится точкой C в отношении* 2 : 5 ...», то учащиеся должны понимать, что отрезок *AB* разделен на семь равных частей, при этом отрезок *AC* содержит две части, а отрезок *CB* содержит пять частей. Кроме того, они должны уметь записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия *отношение* $\frac{AC}{CB} = \frac{2}{5}$. Формирование умения применять понятие *пропорциональности* и навыка записи *отношения* различных величин является методической задачей не только геометрии, но и алгебры.

На закрепление этого навыка полезно выполнить задание 534 б) из учебника и следующие упражнения по готовому чертежу:

1. По данным рисунка 82 определите, как относятся отрезки: а) *DE* к *DF*; б) *EF* к *DF*; в) *DE* к *EF*.
2. По данным рисунка **83** определите, как относится площадь заштрихованных квадратов к площади незаштрихованных квадратов.

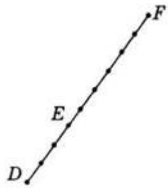


Рис. 82

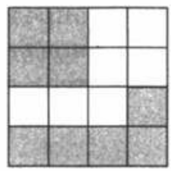


Рис. 83

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать, что называется ***отношением отрезков*** *и какие* ***отрезки*** *называются* ***пропорциональными****. Затем можно выполнить упражнение 116 вместо задания* ***534*** *б) из учебника.*

2°. В учебнике перед введением определения *подобных треугольников* вводится понятие *сходственных* сторон. При его введении следует обратить внимание, что *сходственные* стороны лежат против равных углов и, наоборот, против *сходственных* сторон лежат равные углы (рис. 84). Поэтому, если в условии сказано:

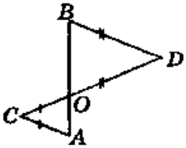


Рис. 84

«*Треугольники ABC* и $A_1B_1C_1$ *подобны, и у них* $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$...», то учащиеся должны уметь записать пропорциональность *сходственных* сторон: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. А если в условии сказано: «*Треугольники ABC* и $A_1B_1C_1$

подобны, и у них $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ ...», то учащиеся должны уметь записать равенство углов: $\angle C = \angle C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Для формирования умения записывать пропорциональность *сходственных* сторон и *равенство* соответствующих углов в подобных треугольниках можно предложить учащимся следующие упражнения.

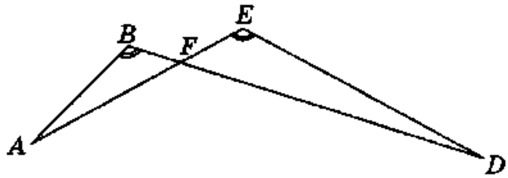


Рис. 85

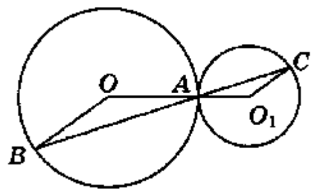


Рис. 86

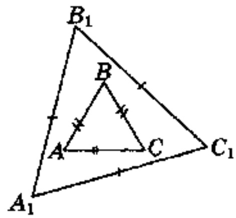


Рис. 87

1. Треугольники, данные на рисунках **84** и **85**, подобны. Запишите отношение сходственных сторон и равенство соответствующих углов.
2. Радиусы окружностей, изображенных на рисунке **86**, относятся, как 2 : 1. Запишите отношение сходственных сторон и равенство соответствующих углов.
3. Опираясь на определение подобных треугольников, докажите, что равносторонние треугольники подобны (рис. **87**).

Для того чтобы проверить правильность усвоения определения *подобных треугольников*, можно предложить решить задачи **541** и **542** из учебника устно по готовому чертежу, иллюстрирующему условие задачи.

После введения определения *коэффициента подобия треугольников* полезно решить задачу 547 устно по готовому чертежу, иллюстрирующему условие задачи.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определения

сходственных сторон и подобных треугольников. *Затем решить задачи 117 и 118, которые дублируют вышеприведенные задачи 1 и 3. После решения задач записать определение* ***коэффициента подобия треугольников*** *и решить задачи 119–121.*

3°. После формулировки теоремы об *отношении площадей подобных треугольников* и выполнения рисунка (рис. 88) следует сделать краткую запись условия и заключения теоремы.

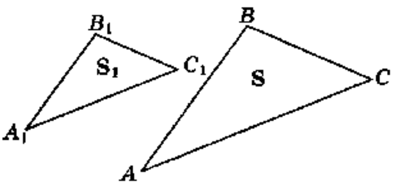


Рис. 88

Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

$\angle A = \angle A_1$

$S = S_{ABC}$; $S_1 = S_{A_1B_1C_1}$

k — коэффициент подобия.

Доказать: $\dfrac{S}{S_1} = k^2$

Доказательство основывается на теореме об *отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.*

Для того чтобы проверить правильность усвоения теоремы об *отношении площадей подобных треугольников,* можно предложить решить задачу 544 устно по готовому чертежу, иллюстрирующему условие задачи.

4°. В задаче 535 учебника рассматривается *свойство биссектрисы угла треугольника,* решение которой приведено в тексте учебника. Традиционно это свойство рассматривалось в курсе планиметрии в качестве теоремы, поэтому полезно разобрать решение задачи по тексту учебника в классе и провести работу по его усвоению и применению в дальнейшем при решении задач. Для этого можно использовать приведенные в учебнике задачи 536–540.

Примерное планирование изучения материала

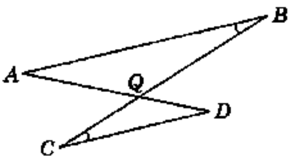
На первом уроке: в классе — рассмотреть весь теоретический материал §1, решить задачи 534 б) (устно), 541, 542, 544 и 547; дома — вопросы 1–4 из вопросов для повторения к главе VII, задачи 533 и 534 а) и в) (устно), 543, 546, 549.

На втором уроке в классе — провести самостоятельную работу по теме «Определение подобных треугольников», рассмотреть решение задачи 535, решить задачи 537 и 539; дома — вопрос 7 из вопросов для повторения к главе VI, задачи 538, 540, 545, 548.

Самостоятельная работа по теме «Определение подобных треугольников»

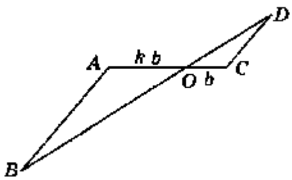
Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант



1. Треугольники ABQ и DCQ подобны. Запишите пропорциональность всех пар сходственных сторон.

Ответ: ____________________



2. Треугольники ABO и CDO подобны с коэффициентом k. Запишите равенства всех пар соответствующих углов.

Ответ: ____________________

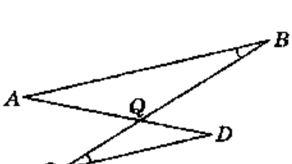
3. Треугольники ABC и FDG подобны, и их сходственные стороны относятся как 5 : 3. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника FDG равен 18 см.

Ответ: ____________________

4. Треугольники ABC и FDG подобны. Площадь треугольника FDG составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

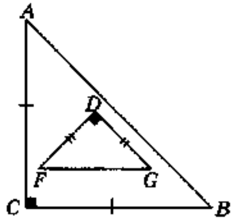
Ответ: ____________________

2-й вариант



1. Треугольники ABQ и DCQ подобны. Запишите пропорциональность всех пар сходственных сторон.

Ответ: ____________________



2. Треугольники ABC и FDG подобны. Запишите равенства всех пар соответствующих углов.

Ответ: ______________________

3. Равносторонние треугольники ABC и FDG подобны, и их стороны относятся как 3 : 2. Найдите периметр треугольника ABC, если сторона треугольника FDG равна 2 см.

Ответ: ______________________

4. Треугольники ABC и FDG подобны. Площадь треугольника FDG составляет $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

Ответ: ______________________

Указания к задачам

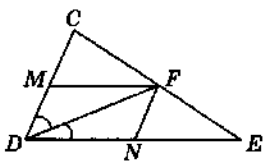


Рис. 89

При решении задач 539 и 540 следует воспользоваться свойством диагоналей ромба: «*Диагонали ромба являются биссектрисами его углов*», а затем использовать результат, доказанный в задаче **535**. На рисунке 89 отражено условие задачи 540.

При решении задачи 541 следует обратить внимание учащихся на то, что *сходственные* стороны лежат против равных углов, а при решении задачи 542 — что равные углы лежат против *сходственных* сторон.

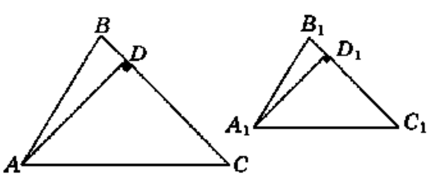


Рис. 90

Задача 543. Рассмотрим $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (рис. **90**) с *коэффициентом подобия* k. Тогда по теореме об отношении площадей *подобных треугольников* $\frac{S}{S_1} = k^2$, где S — площадь треугольника

ABC, а S_1 — площадь треугольника $A_1B_1C_1$. Их *сходственные* стороны AB и A_1B_1 обозначим через c и c_1, а проведенные к ним высоты — h и h_1. Тогда по определению *коэффициента подобия* $k = \frac{c}{c_1}$. Значит, $\frac{c \cdot h}{c_1 \cdot h_1} = \left(\frac{c}{c_1}\right)^2$, откуда $\frac{h}{h_1} = \frac{c}{c_1}$.

§2. Признаки подобия треугольников (4 ч)

Комментарий для учителя

В данном параграфе рассматривается одна из важнейших тем всего курса планиметрии: признаки подобия треугольников. Сформированность умения применять их во многом определит успешность дальнейшего усвоения теоретической части курса геометрии. Кроме того, необходимо уделить максимальное внимание формированию практических умений и навыков.

Текущие результаты изучения параграфа 2. Учащиеся должны научиться:
- формулировать, иллюстрировать и доказывать признаки подобия треугольников;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ признаки подобия треугольников;
  - ➢ алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Так как *первый признак подобия треугольников* является основой для доказательства второго и третьего *признаков подобия треугольников*, то его доказательство лучше провести полностью самому учителю. Включение учащихся во фронтальную работу при первичном разборе теоремы может привести к тому, что от учащихся ускользнет основная идея доказательства, логическая последовательность рассуждений.

Изучение теоремы начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 91 по условию теоремы. При этом полезно отметить в треугольниках соответственно равные углы. А затем выполнить краткую запись условия и заключения теоремы.

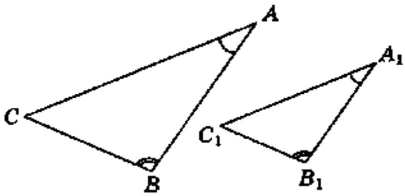


Рис. 91

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;
$\angle A = \angle A_1$;
$\angle B = \angle B_1$

Доказать: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

После чего следует воспроизвести определение подобных треугольников и акцентировать внимание учащихся на том, что, чтобы доказать подобие треугольников, необходимо доказать равенство углов и пропорциональность сходственных сторон. Затем изложить доказательство теоремы в соответствии с текстом учебника.

После доказательства *первого признака подобия треугольников* полезно устно решить задачу **550** из учебника, а затем решить следующую задачу:

В трапеции ABCD проведены диагонали AC и BD. Докажите, что треугольники COB и AOD подобны (рис. 92).

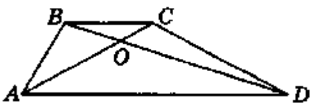


Рис. 92

Дано: *$ABCD$ — трапеция;*
AC и BD — диагонали;
$CA \cap DB$ точка O.

Доказать: $\Delta COB \backsim \Delta AOD$

Доказательство.

Рассмотрим ΔAOD и ΔBOC:

$\angle AOD = \angle BOC$ — вертикальные;

$\angle BCA = \angle CAD$ — внутренние накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BC и AD прямой AC;

Следовательно, $\Delta COB \backsim \Delta AOD$ по двум углам.

Следует при этом обратить внимание учащихся на то, что правильная, геометрически грамотная ссылка на *первый признак подобия треугольников* должна быть именно в такой форме: «*по двум углам*». Однако, вообще говоря, возможны и другие формы ссылки, например, полная формулировка или указание номера признака. Решение этой задачи полезно записать полностью в тетрадях учащихся, оно является частью решения задачи 552 из учебника. После чего устно решить задачу 1 из дополнительных задач методического пособия — это известная лемма о подобии треугольников.

Здесь же полезно рассмотреть подобие равнобедренных треугольников. Сначала решить задачу 2 из дополнительных задач методического пособия. После решения этой задачи можно предложить учащимся задачу 553 из учебника.

Учителю при решении задач необходимо уделить внимание работе с рисунками и обратить внимание учащихся на то, что в подобных треугольниках могут быть равными только углы. На задачах, которые решаются письменно, полезно показать учащимся примеры оформления письменного решения и поощрять рациональные, лаконичные записи решения задач.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку ***первого признака подобия треугольников.*** *После решения задачи 550 из учебника решить задачу 123 из тетради. Задача 1 из дополнительных задач методических рекомендаций в рабочей тетради дана под номером 132. Рассматривая подобие равнобедренных треугольников, можно решить задачи 125 и 127–129.*

2°. Так как доказательство *второго признака подобия треугольников* отличается от доказательства *первого признака подобия треугольников*, то его лучше провести полностью самому учителю.

Изучение теоремы начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка **93** по условию теоремы. При этом полезно отметить в треугольниках соответственно равные углы. А затем выполнить краткую запись условия и заключения теоремы.

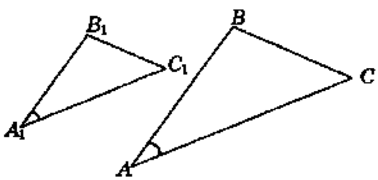


Рис. 93

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;

$$\angle A = \angle A_1;$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

После чего следует напомнить учащимся свойства пропорций. Затем изложить доказательство теоремы по следующей схеме.

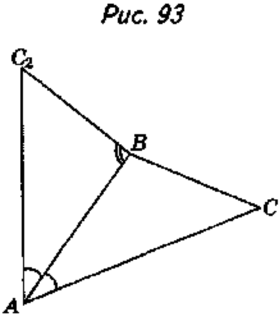


Рис. 94

1. Дополнительное построение: на стороне AB треугольника ABC построим треугольник ABC_2, у которого $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 94).

2. Доказывается подобие треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC_2 *по двум углам.*

3. Из подобия треугольников следует: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$ и $AC = AC_2$.

4. Доказывается равенство треугольников ABC и ABC_2 по двум сторонам и углу между ними ($\angle A = \angle A_1$ по условию; AB по построению; $AC = AC_2$ по доказанному).

Вывод: треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны.

После доказательства теоремы следует обратить внимание учащихся на то, что ссылка на *второй признак подобия треугольников* должна быть: «*по двум пропорциональным сторонам и углу между ними*». Однако возможны и другие формы ссылки, например, полная формулировка или указание номера признака.

После доказательства *второго признака подобия треугольников* полезно устно решить задачу 3 из дополнительных задач методического пособия.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку ***второго признака подобия треугольников*** *и решить задачи 131 и 136 из тетради. Если на дом будет задана задача 562, то можно предложить учащимся самостоятельно разобрать решение задачи 135.*

3*. Так как доказательство *третьего признака подобия треугольников* аналогично доказательству *второго признака подобия треугольников*, то его можно провести по плану, предложенному для проведения доказательства *второго признака подобия треугольников*, с активным привлечением учащихся.

После доказательства теоремы следует обратить внимание учащихся на то, что ссылка на *третий признак подобия треугольников* должна быть «*по трем сторонам*».

После доказательства *третьего признака подобия треугольников* полезно устно решить задачу 560 а) из учебника и задачу 4 из дополнительных задач методического пособия.

Здесь полезно продолжить рассмотрение подобия равнобедренных треугольников. Для этого решить задачу 5 из дополнительных задач методического пособия.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку ***третьего признака подобия треугольников*** *и решить задачи 124 и 133 из тетради.*

4°. На четвертом уроке рекомендуется провести внутритематическое повторение *признаков подобия треугольников*. Для этого можно использовать плакат такого типа, как на рисунке 95, включив в него контрпримеры 3), 5) и 11) и сопровождая работу по нему вопросами:

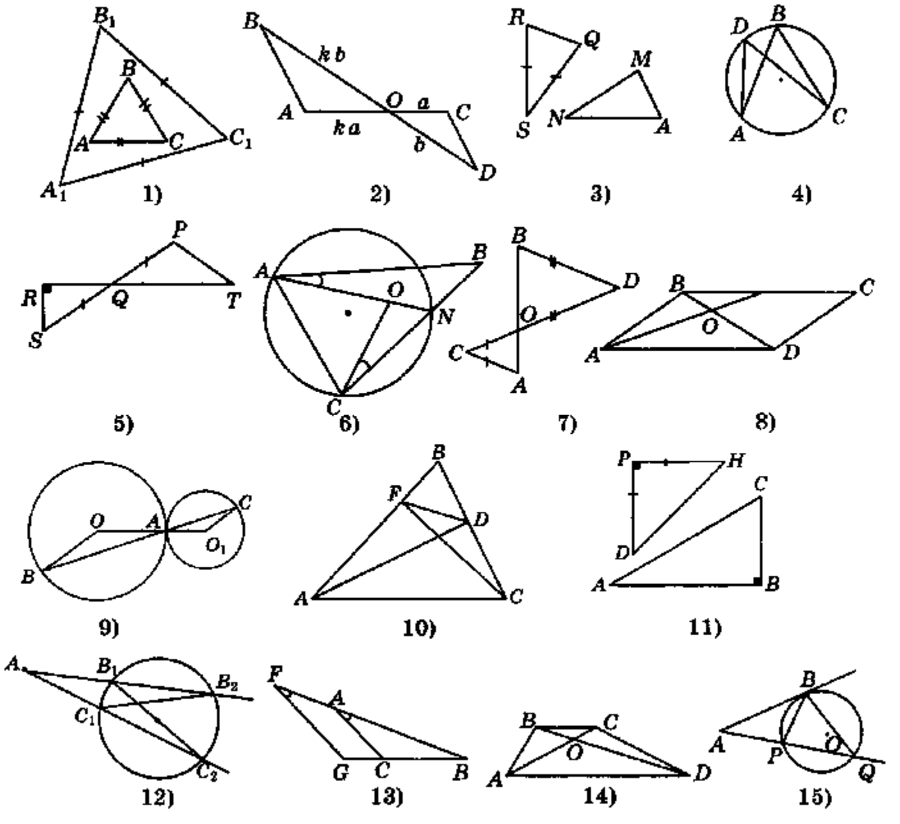


Рис. 95.

1. Какие из приведенных пар треугольников являются подобными?

2. Почему эти треугольники подобны?

3. Определите, являются ли треугольники 95 3), 5) и 11) на рисунке подобными и почему.

После работы с плакатом можно провести самостоятельную работу, первые два задания которой — это задания с кратким ответом, а третье задание — с развернутым ответом. Затем организовать работу по решению задач, используя задачи, нерешенные в процессе изучения темы. Полезно еще раз вернуться к задачам 543 и 547. Из рассмотрения этих задач следует: *«В подобных треугольниках отношение сходственных сторон равно отношению соответствующих отрезков (высот, медиан, биссектрис и т.д. треугольников)»*.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся выполнить задание 122, которое является аналогом работы с плакатом.*

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 61; решить задачи 550, 553 и разобрать решение задачи 556 по тексту учебника; дома — вопрос 5 из вопросов для повторения к главе VII, задачи 552 а), 555 б), 557 а).

На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 62; решить задачи 552 в), 555 а), 558 и 611; дома — вопрос 6 из вопросов для повторения к главе VII, задачи 552 б), 559, 562 и 610.

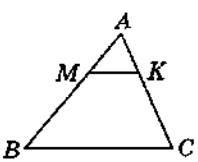
На третьем уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 63; решить задачу 560 а), 607 и 613 а); дома — вопрос 7 из вопросов для повторения к главе VII, задачи 560 б), 608, 609.

На четвертом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 67, провести самостоятельную работу по теме «Применение подобия к доказательству теорем и решению задач», решить задачи 586 и 589; дома — вопрос 14 из вопросов для повторения к главе VII, задачи 585 б), 587 и 590.

Самостоятельная работа по теме «Признаки подобия треугольников»

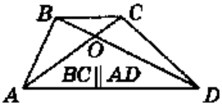
Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант



1. В треугольнике ABC через точку M, лежащую на стороне AB, параллельно стороне BC проведена прямая, которая пересекает сторону AC в точке K. Найдите длину отрезка MB, если $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $MK = 4$ см.

Ответ: ______________________

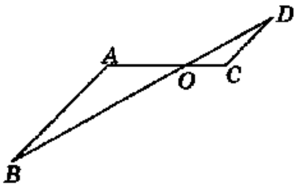


2. Используя данные рисунка, определите, есть ли здесь подобные треугольники, и укажите признак подобия треугольников.

Ответ: ______________________________

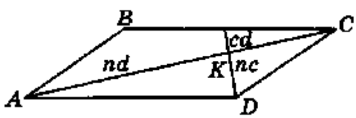
3. Докажите, что если катет и гипотенуза одного прямоугольного равнобедренного треугольника пропорциональны катету и гипотенузе другого прямоугольного равнобедренного треугольника, то эти треугольники подобны.

2-й вариант



1. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O так, что прямые AB и CD параллельны. Известно, что $AB = 18$ см, $CD = 12$ см и $CO = 8$ см. Найдите длину отрезка AC.

Ответ: ______________________________



2. Используя данные рисунка, определите, есть ли здесь подобные треугольники, и укажите признак подобия треугольников.

Ответ: ______________________________

3. В равностороннем треугольнике ABC проведены высоты $AP = BR = CQ$. Докажите, что треугольник PRQ подобен треугольнику ABC.

Указания к задачам

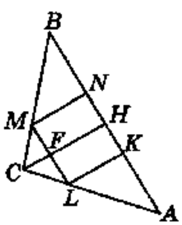


Рис. 96

Задача 562. Рассмотрим треугольники ABC и LMC (рис. 96). Они подобны, так как $ML \parallel AB$ (задача 1 из дополнительных задач методического пособия) с коэффициентом подобия k. Отсюда $ML = kAB$, $CM = kCB$. Треугольники CBH и MBN подобны, так как $MN \parallel AH$ с коэффициентом подобия $1 - k$, что следует из $BM = (1 - k)CB$. Отсюда $MN = (1 - k)CH$. $ML = MN$ как стороны квадрата.

Значит, $kAB = (1 - k)CH$; $ka = (1 - k)h$; $k = \dfrac{h}{a + h}$; $ML = \dfrac{ah}{a + h}$.

Если задачу 562 решать после решения задачи 543, то достаточно рассмотреть треугольники ABC и LMC, и из их подобия получаем $\dfrac{ML}{AB} = \dfrac{CF}{CH}$; $ML = \dfrac{ah}{a + h}$.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что прямая, параллельная одной из сторон треугольника, отсекает от него подобный треугольник.

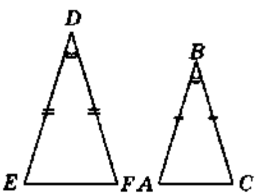


Рис. 97

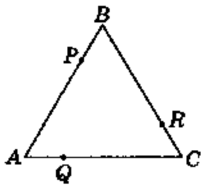


Рис. 98

2. В равнобедренных треугольниках ABC ($AB = BC$) и EDF ($ED = DF$) углы при вершинах B и D равны. Докажите, что треугольники ABC и EDF подобны (рис. 97).

3. В треугольниках ABC и EDF углы при вершинах B и D равны, а стороны AB и BC, заключающие $\angle B$, соответственно больше сторон ED и DF, заключающих $\angle D$, в три раза. Определите, подобны ли эти треугольники.

4. На сторонах равностороннего треугольника ABC отложены отрезки $AP = BR = CQ$. Докажите, что треугольники PRQ и ABC подобны (рис. 98).

5. Докажите, что если боковая сторона и основание одного равнобедренного треугольника пропорциональны боковой стороне и основанию другого равнобедренного треугольника, то эти треугольники подобны.

§3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач (4 ч)

Комментарий для учителя

В параграфе рассматривается прикладной аспект применения теории подобия к доказательству теорем; решению большого класса задач как на вычисления, так и на доказательство и построение; измерению недоступных объектов.

Материал, представленный в параграфе, является традиционным для любого курса планиметрии: теорема о средней линии треугольника, задача о точке пересечения медиан, выражения высоты и катета прямоугольного треугольник через гипотенузу и отрезки гипотенузы, на которые ее делит основание высоты, решение задач на построение методом подобия.

Текущие результаты изучения параграфа 3. Учащиеся должны научиться:

- изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках средние линии треугольников;
- выделять в конфигурации, данной в условии задачи, средние линии треугольников;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему о средней линии треугольника;
- формулировать, иллюстрировать и устанавливать свойства пропорциональных отрезков в прямоугольных треугольниках;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать свойство точки пересечения медиан;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ признаки подобия треугольников;
  - ➢ теорему о средней линии треугольника;
  - ➢ теоремы о пропорциональных отрезках прямоугольных треугольников;
  - ➢ алгебраический аппарат;
  - ➢ определения тригонометрических функций и тригонометрические тождества;
- применять при решении задач на построение понятие подобия.

Методические рекомендации к изучению материала

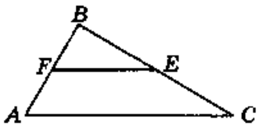


Рис. 99

1°. Понятие *средней линии треугольника* полезно ввести на наглядном уровне. В треугольнике ABC отметим точку F — середину стороны AB и точку E — середину стороны BC и соединим точки F и E. Отрезок FE называется *средней линией треугольника* (рис. 99). После этого сформулировать определение *средней линии треугольника.* Для проверки правильности усвоения учащимися понятия *средней линией треугольника* и умения находить ее в стандартных ситуациях выполнить работу по готовым чертежам, например, как на рисунке 100, включив в их набор контрпримеры в) и д):

1. Среди треугольников, приведенных на рисунках, найдите треугольники, в которых проведена *средняя линия треугольника.*

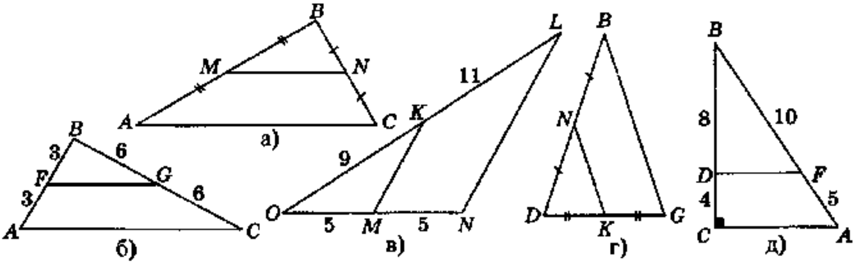


Рис. 100

2. Определите, является ли отрезок MN на рисунке 100 а) *средней линией треугольника,* и объясните, почему.
3. Определите, является ли отрезок DF на рисунке 100 д) *средней линией треугольника,* и объясните, почему.
4. На рисунке 100 г):

1) отрезок KN является средней линией треугольника DBG, *или*

2) $DB = 14$ см, $DG = 10$ см.

Чему равны отрезки DK, KG, DN, NB?

5. Сколько *средних линий* можно построить в одном треугольнике?

При введении определения *средней линии треугольника* основное внимание необходимо направить на понимание учащимися формулировки определения, т.е., если в условии сказано: «*отрезок FG — средняя линия треугольника ABC...*», то учащиеся должны уметь выделить и записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия равные отрезки: $AF = FB$, $BG = GC$ (рис. 100 б).

> *В рабочей тетради следует записать определение* средней линии треугольника *и выполнить задание 141, аналогичное приведенным выше упражнениям. Затем выполнить упражнение 142, направленное на формирование умения* <u>*подводить учащихся к пониманию определения*</u> ***средней линии треугольника****. В задаче 143 требуется построить* ***среднюю линию треугольника****. После построения средней* ***линией треугольника*** *полезно выяснить, сколько* ***средних линий*** *можно построить в данном треугольнике.*

2°. После формулировки теоремы о *средней линии треугольника*, выполнения чертежа по условию теоремы (рис. 99) и записи краткого условия можно предложить учащимся провести ее доказательство самостоятельно или разобрать по тексту учебника.

Для закрепления *теоремы о средней линии треугольника* можно предложить учащимся решить устно задачи 564 и 567 из учебника. Затем по тексту учебника разобрать решение задачи 1 из §3 главы VII учебника и на проверку усвоения того факта, что *«медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении* 2 : 1, *считая от вершины»*, решить задачу 570.

> *В рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о* ***средней линии треугольника*** *и решить задачи 144–147. Задачу 147 можно предложить после решения задачи 567 из учебника.*

3°. Перед решением задачи 2 из §3 главы VII учебника полезно рассмотреть подобие прямоугольных треугольников. Можно предложить учащимся сформулировать признаки подобия прямоугольных треугольников. У прямоугольного треугольника один угол прямой. Поэтому первый признак подобия треугольников для прямоугольных треугольников можно сформулировать так: *«Если два прямоугольных треугольника имеют по одному равному острому углу, то они подобны»*, а второй: *«Если катеты двух прямоугольных треугольников пропорциональны, то эти треугольники подобны»*. Доказательства этих утверждений можно получить в ходе решения задач:

1. Докажите, что два прямоугольных треугольника подобны, если они имеют по одному равному острому углу.
2. Докажите, что два прямоугольных треугольника подобны, если их катеты пропорциональны.

На применение признаков подобия прямоугольных треугольников можно устно решить задачи 1 и 2 из дополнительных задач методического пособия.

В рабочей тетради признаки подобия прямоугольных треугольников рассматриваются при решении задач 148–151.

Учебный материал пункта 67 можно рассмотреть при активном привлечении учащихся, используя рисунок 197 из учебника. На прямое применение изученного материала можно выполнить упражнения 572 а), 574 а) и 577. Если позволит время, то решение задачи 577 полезно выполнить письменно.

В рабочей тетради следует записать утверждения о ***пропорциональных отрезках*** *в прямоугольном треугольнике.*

4°. На третьем уроке по тексту учебника разобрать решение задачи 3 из §3 главы VII учебника и решение задачи 584 из учебника. При этом полезно напомнить учащимся, что для подобия треугольников достаточно только равенства углов. Именно это обстоятельство лежит в основе решения задач типа задачи 3 из текста пункта 66 учебника, т.е. *первый признак подобия треугольников*. Решение задач типа задачи 584 основывается на *втором признаке подобия треугольников*.

Объяснить учащимся, как определить высоту предмета, можно на примере решения задачи 579, используя доказанный на втором уроке *признак подобия прямоугольных треугольников*. Как определить расстояние до недоступной точки, лучше объяснить на примере решения задачи 582.

Рис. 101

5°. *Подобие произвольных фигур* в соответствии с программой дается в ознакомительном порядке, поэтому формой организации урока может быть беседа.

При рассмотрении понятия «*подобие произвольных фигур*» следует обратить внимание на его важнейшее свойство: *расстояние между точками изменяется в одно то же число раз*. То есть если в условии сказано, что фигуры F и F' — *подобны*, то учащиеся должны понимать, что в этом случае точки X и Y фигуры F переходят в точки X' и Y' фигуры F' (рис. 101), и записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия $X'Y' = kXY$. Здесь полезно обсудить с учащимся вопрос: *В каком отношении находятся фигуры F и F', если коэффициент подобия равен* 1?

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 64, решить задачи 564, 567 и 570; дома — вопросы 8 и 9 из вопросов для повторения к главе VII, задачи 565, 568 и 571.

На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 65, решить задачи 572 а), 574 а) и 577; дома — вопросы 10 и 11 из вопросов для повторения к главе VII, задачи 572 г) и д), 574 б), 575.

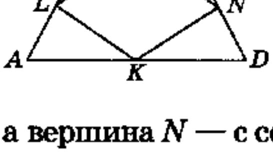
На третьем уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 66, решить задачи 579, 582, 584; дома — вопросы 12 и 13 из вопросов для повторения к главе VII, задач 581, 585 а) и в), 588.

На четвертом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 67, провести самостоятельную работу, решить задачи 586 и 589; дома — вопрос 14 из вопросов для повторения к главе VII, задачи 585 б), 587 и 590.

Самостоятельная работа по теме «Применение подобия к доказательству теорем и решению задач»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант

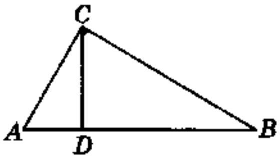


1. В равнобедренную трапецию $ABCD$ вписан параллелограмм $KLMN$. Вершины параллелограмма лежат на сторонах трапеции, причем вершина M совпадает с серединой основания BC, а вершина N — с серединой стороны CD. Найдите периметр параллелограмма $KLMN$, если диагональ трапеции равна 12 см.

Ответ: 1) 48 см; 2) 18 см; 3) 36 см; 4) 24 см.

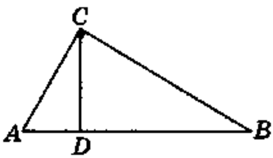
2. Определите, вершинами какого четырехугольника являются середины сторон параллелограмма:

1. *параллелограмма, отличного от прямоугольника и ромба;*
2. *прямоугольника, отличного от квадрата;*
3. *ромба, отличного от квадрата;*
4. *квадрата.*



3. Высота CD прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу AB на отрезки AD и DB. Найдите высоту CD, если $AD = 9$ см, $BD = 16$ см.

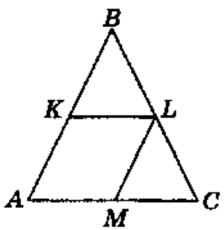
Ответ: ______________________



4. Высота CD прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу AB на отрезки AD и DB. Найдите гипотенузу AB, если $DB = 3{,}2$ см, а $AC = 3$ см.

Ответ: ______________________

2-й вариант

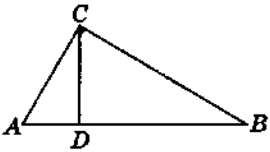


1. В равностороннем треугольнике ABC отмечены точки K, L и M, которые являются серединами сторон AB, BC и AC соответственно. Найдите периметр четырехугольника $AKLM$, если периметр треугольника KBL равен 18 см.

Ответ: 1) 12 см; 2) 9 см; 3) 24 см; 4) 18 см.

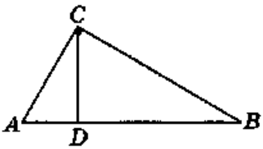
2. Определите, вершинами какого четырехугольника являются середины сторон ромба, отличного от квадрата:

1. *параллелограмма, отличного от прямоугольника и ромба;*
2. *прямоугольника, отличного от квадрата;*
3. *ромба, отличного от квадрата;*
4. *квадрата.*



3. Высота CD прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу AB на отрезки AD и DB. Найдите гипотенузу AB, если $CD = 6$ см, а отрезок AD на 5 см короче отрезка DB.

Ответ: ______________________________



4. Высота CD прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу AB на отрезки AD и DB. Найдите гипотенузу AB, если DB на 1,4 см больше AD, а $AC = 3$ см.

Ответ: ______________________________

Указания к задачам

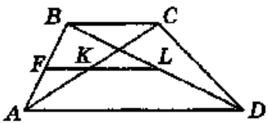


Рис. 102

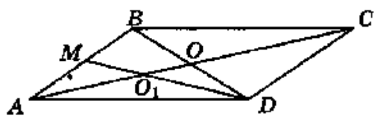


Рис. 103

Задача **569**. В треугольнике ABD проведем среднюю линию FL. По теореме о средней линии треугольника $FL \parallel AD$ и $FL = \frac{1}{2}AD$. В треугольнике ABC проведем среднюю линию FK (рис. 102). По теореме о средней линии треугольника $FK \parallel BC$ и $FK = \frac{1}{2}BC$. В силу признака параллельности прямых $FK \parallel AD$. А по аксиоме о параллельных прямых через точку F можно провести только одну прямую, параллельную AD. Значит, точки F, K и L лежат на одной прямой, и, следовательно, $KL = FL - FK = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

Решение задачи **570** следует непосредственно из рисунка 103. В треугольнике ABD отрезки DM и AO — медианы, а O_1 — точка их пересечения.

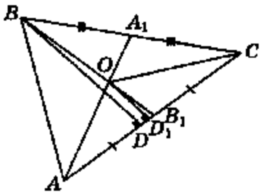


Рис. 104

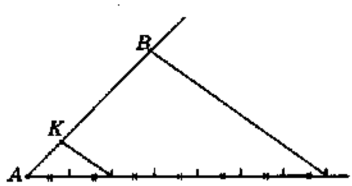


Рис. 105

Задача 571. Выполнить дополнительное построение: проведем в треугольниках ABC и AOC высоты BD и OD_1 соответственно. Рассмотрим треугольники DBB_1 и D_1OB_1 (рис. 104). Они подобны, так как $DB \parallel D_1O$(задача 1 из дополнительных задач методического пособия к §2) с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$, так как O — точка пересечения медиан. Отсюда $OD_1 = \frac{1}{3}BD$, значит, $S_{AOC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Аналогично доказывается, $S_{BOC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. По свойству площадей $S_{ABC} = S_{AOC} + S_{BOC} + S_{AOB}$, отсюда $S_{AOB} = \frac{1}{3}S_{ABC}$. Следовательно, $S_{ABC} = 3S_{AOB} = 3S$.

Решение задачи 585 аналогично решению задачи 584 и непосредственно следует из рисунка 105. На рисунке 103 отражено решение задачи 585 а).

Решение задачи 586 аналогично решению задачи 3 из пункта 64 учебника. Ниже приведено примерное оформление решения.

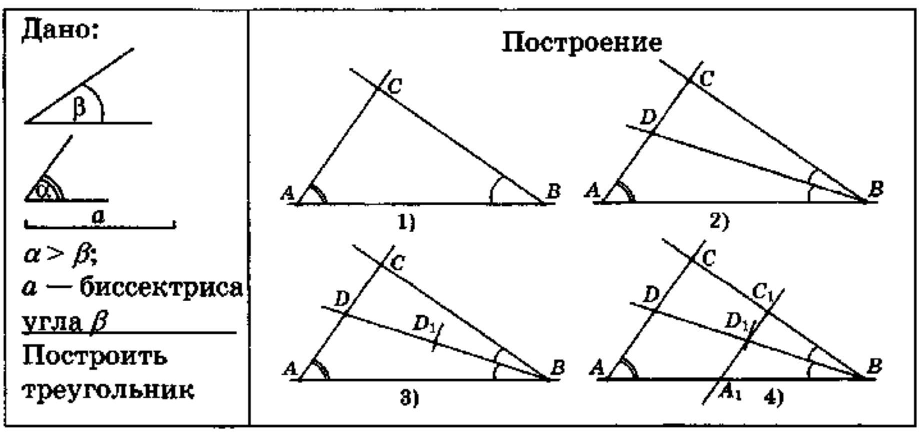


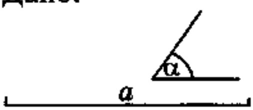
Рис. 106

Построение (рис. 106)

На прямой от точки A отложим $\angle BAC$, равный данному углу α, а на луче BA — $\angle ABC$, равный данному углу β, где C — точка пересечения сторон углов α и β (рис. 106.1). Построим биссектрису $\angle ABC$ (рис. 106.2). От точки B на биссектрисе BD отложим отрезок BD_1, равный данному отрезку a — биссектрисе искомого треугольника (рис. 106.3). Через точку D_1 проведем прямую, параллельную AC (рис. 106.4). Треугольник A_1BC_1 — искомый, так как треугольники ABC и A_1BC_1 подобны, поскольку $A_1C_1 \parallel AC$. $\angle ABC$ — общий, $\angle BA_1C_1 = \angle B_1A_1C_1$, и биссектриса BD_1 равна отрезку a по построению.

Решение задачи 588 аналогично решению задачи 568. Ниже приведено примерное построение без его описания (рис. 107).

Дано:



a — медиана.

Построить треугольник

Построение

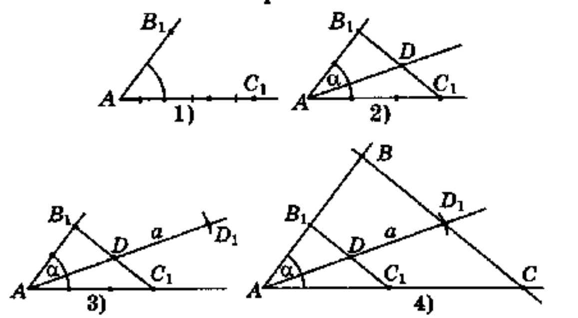
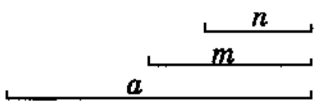


Рис. 107

Ниже приведено примерное построение, необходимое для решения задачи 590, без его описания (рис. 108).

Дано:



a — гипотенуза;

$\angle C = 90°$

$$\frac{AC_1}{B_1C_1} = \frac{m}{n}$$

Построить треугольник

Построение

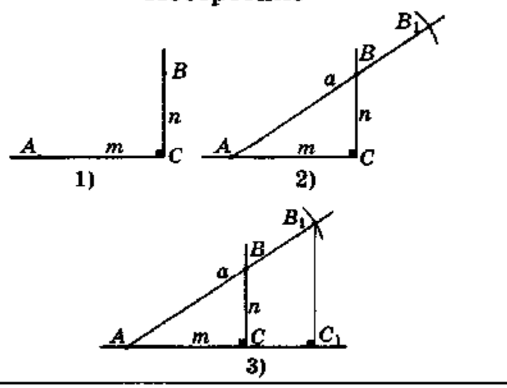


Рис. 108

Дополнительные задачи

1. Угол одного прямоугольного треугольника равен 30°, а другого — 60°. Определите, подобны ли данные треугольники.

2. Катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника равны 6 см и 10 см, а катеты другого — 9 см и 12 см. Определите, подобны ли данные треугольники.

§4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника (2 ч)

Комментарий для учителя

1. Материал, представленный в параграфе, является традиционным для любого курса планиметрии: решение прямоугольных треугольников.

Текущие результаты изучения параграфа 4. Учащиеся должны научиться:

- формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о пропорциональных отрезках прямоугольных треугольников;
- объяснять тригонометрические термины «*синус*», «*косинус*», «*тангенс*»;
- оперировать начальными понятиями тригонометрии, выводить основное тригонометрическое тождество;
- решать прямоугольные треугольники;
- определять значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ для α, равного 30°, 45° и 60°;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ определения тригонометрических функций и тригонометрические тождества;
  - ➢ алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Перед введением определений *синуса*, *косинуса* и *тангенса острого угла прямоугольного треугольника* полезно вспомнить с учащимися названия сторон *прямоугольного треугольника*.

При введении определений полезно обратить внимание учащихся на то, что, если в условии сказано: «...*синус* (*косинус*) *острого угла прямоугольного треугольника равен* ...», то это означает, что задано отношение противолежащего (прилежащего) данному углу катета и гипотенузы. Если же в условии сказано: «...*тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен* ...», то это означает, что задано отношение противолежащего и прилежащего данному углу катетов. При этом следует подчеркнуть, что данные определения *синуса*, *косинуса* и *тангенса острого угла прямоугольного треугольника* относятся именно к углу *острому* и к треугольнику *прямоугольному*, что и подчеркивается в самом названии: «*синус* (*косинус*, *тангенс*) *острого угла прямоугольного треугольника*».

После введения определения *синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника* на формирование умения *применять эти определения* можно предложить учащимся выполнить устно упражнения по готовым чертежам.

1. Дан прямоугольный треугольник ABC. По данным рисунка 109 выразите через стороны прямоугольного треугольника ABC:
а) $\cos A$; б) $\sin A$;
в) $\operatorname{tg} A$; г) $\cos B$;
д) $\sin B$; е) $\operatorname{tg} B$.

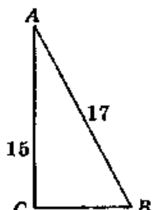


Рис 109

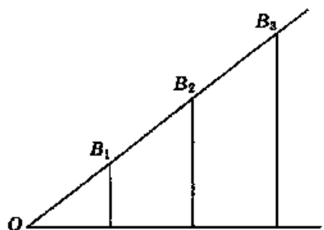


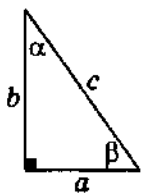
Рис. 110

2. В прямоугольном треугольнике катет равен 8 см, а косинус прилежащего угла равен 0,8. Чему равна гипотенуза?

3. На сторонах угла B_3OA_3 отложены отрезки $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = 5$ см (рис. 110). Из точек B_1, B_2 и B_3 опущены перпендикуляры на другую сторону угла, причем $OA_1 = 4$ см. Найдите $\cos O$; $\sin O$; и $\operatorname{tg} O$ из: а)ΔA_1OB_1, б) из ΔA_2OB_2; ΔA_3OB_3.

2°. В результате решения вышеприведенной задачи 3, в которой значения *синуса, косинуса и тангенса острого угла О прямоугольного треугольника* находили из разных прямоугольных треугольников, можно сделать вывод, что значения *синуса, косинуса и тангенса острого угла О прямоугольного треугольника* не зависят от выбора прямоугольного треугольника. Во всех случаях результат получился один и тот же, хотя размеры треугольников были различны. Отсюда следует предположение: *«Если в двух прямоугольных треугольниках острые углы равны, то значения синуса, косинуса и тангенса этих углов равны»*, доказательство которого можно предложить учащимся разобрать самостоятельно по тексту учебника.

Из теоремы Пифагора и определений косинуса, синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника следуют правила нахождения сторон прямоугольного треугольника. Для этого можно использовать плакат такого типа, как на рисунке 111.



$c^2 = a^2 + b^2$	$a^2 = c^2 - b^2$	$b^2 = c^2 - a^2$
$c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$; $c = \dfrac{a}{\cos\beta}$	$a = c \cdot \sin\alpha$	$b = c \cdot \sin\beta$
	$a = c \cdot \cos\beta$	$b = c \cdot \cos\alpha$
$c = \dfrac{b}{\sin\beta}$; $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$	$a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha$	$b = a \cdot \mathrm{tg}\beta$

Рис. 111

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировки определений ***синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника*** *и устно выполнить задания 153–106, которые полностью совпадают с вышеприведенными задачами 1–3. Цель их выполнения та же — сформировать умение* применять *введенные* определения. *В тетради приведена таблица, данная на рисунке 111, поэтому можно обойтись на уроке без плаката.*

3°. В параграфе рассматриваются выражение для *tgα* и основное тригонометрическое тождество:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Значение этих выражений заключается в том, что они позволяют по одной из величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha$ найти две другие. Заметим, что на данном этапе обучения не ставится целью формирование умений выполнения тождественных преобразований тригонометрических выражений. Основной материал раздела тригонометрии будет изучаться в курсе алгебры.

Доказательство основного тождества, данное в учебном пособии, достаточно просто и не требует специальных разъяснений.

4°. Как показывает опыт, полезно иметь в классе таблицу, в которой даны значения синуса, косинуса и тангенса некоторых углов. При этом кроме изучаемых в пункте углов 30°, 45° и 60° в нее могут быть включены значения функций углов 0° и 90°. Такую же таблицу полезно сделать в тетрадях учащихся.

После вычисления значений функций углов можно предложить учащимся решить задачи 593 а) и 601 из учебника.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся заполнить таблицу в задаче 158.

Примерное планирование изучения материала

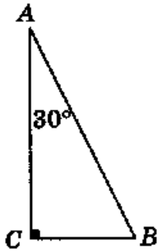
На первом уроке: в классе — рассмотреть весь теоретический материал параграфа 4, решить задачи 592 а), в) и д), 593 а) и 601 из учебника; дома — вопросы 15–18 из вопросов для повторения к главе VII, задачи 592 б), г) и е), 593 б) и е), 602.

На втором уроке: в классе — провести самостоятельную работу по теме «Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника», решить задачи 598 а), 599 и 603; дома — 598 б), 600.

Самостоятельная работа по теме «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант

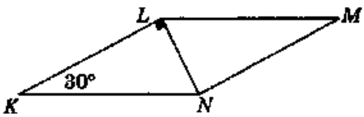


1. В прямоугольном треугольнике катет AC равен $5\sqrt{3}$ см. Найдите катет BC, если угол, прилежащий к катету AC, равен 30°.

Ответ: 1) $5\sqrt{\frac{3}{2}}$ см; 2) $2\sqrt{15}$ см; 3) 5 см; 4) 10 см.

2. В треугольнике ABC внешний и внутренний углы при вершине C равны. Определите, какая из сторон треугольника ABC является наибольшей.

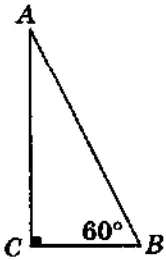
Ответ: ______________________________



3. В параллелограмме $KLMN$ диагональ LN перпендикулярна стороне KL. Найдите периметр параллелограмма $KLMN$, если диагональ LN равна $3\sqrt{3}$ см, а угол LKN равен 30°.

Ответ: ______________________________

2-й вариант

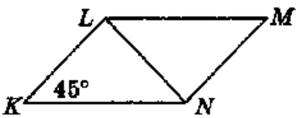


1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза AB равна 10 см, а острый угол, прилежащий к катету BC, равен 60°. Найдите катет AC.

Ответ: 1) $5\sqrt{3}$ см; 2) $5\sqrt{5}$ см; 3) 5 см; 4) 3 см.

2. В треугольнике ABC сумма градусных мер углов A и B равна градусной мере угла C. Определите, какая из сторон треугольника ABC является наибольшей.

Ответ: ______________________________



3. В параллелограмме $KLMN$ диагональ LN перпендикулярна стороне KL. Найдите периметр параллелограмма $KLMN$, если диагональ LN равна $6\sqrt{2}$ см, а угол LKM равен 45°.

Ответ: ______________________________

Дополнительные задачи

1. Углы при основании трапеции равны 45° и 30°, а высота трапеции равна 6 см. Найдите боковые стороны трапеции.

2. Угол при основании равнобедренной трапеции равен 60°, а боковая сторона равна меньшему основанию и равна 10 см. Чему равна средняя линия трапеции?

3. Сторона ромба равна a, а один из его углов равен 120°. Чему равны диагонали ромба?

4. Диагональ параллелограмма равна a и перпендикулярна его стороне. Чему равны стороны параллелограмма, если угол параллелограмма равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°?

5. Одно из оснований трапеции в два раза больше другого, а углы при основании равны 90° и 45°. Чему равны боковые стороны трапеции, если меньшее основание равно 12 см?

6. Основание трапеции равно 16 см, а углы, прилежащие к нему, равны 90° и 30°. Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. Чему равна средняя линия трапеции?

Систематизация и обобщение знаний по теме «Подобие треугольников»

Комментарий для учителя

1°. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Подобие треугольников» учащиеся должны:
- изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках подобные треугольники, средние линии треугольников;
- выделять в конфигурации, данной в условии задачи, подобные треугольники, средние линии треугольников;
- решать прямоугольные треугольники;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ признаки подобия треугольников;
  - ➢ теорему о средней линии треугольника;
  - ➢ свойство точки пересечения медиан;
  - ➢ теоремы о пропорциональных отрезках прямоугольных треугольников;
  - ➢ алгебраический аппарат;
  - ➢ определения тригонометрических функций и тригонометрические тождества;
- применять при решении задач на построение:
  - ➢ понятие подобия.

2°. Подготовку к контрольной работе по теме «Подобие треугольников» полезно организовать как урок решения задач. При подготовке к итоговой контрольной работе следует провести повторение, используя весь оставшийся резерв времени, оставив один урок для разбора решений итоговой работы. Задания для повторения можно брать из учебника, используя либо не решенные в процессе обучения, либо наиболее важные задания каждой темы. Кроме того, учитель может создать свой набор задач для повторения в зависимости от уровня подготовки класса.

В сборнике тестов Т.М. Мищенко, А.Д. Блинкова «Геометрия. Тесты. 8 класс» к учебнику Л.С. Атанасяна и др. издательства «Просвещение» для главы VII «Подобие треугольников» рекомендованы тесты 10 и 11, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении данной темы. Каждый тест имеет четыре варианта.

Повторение можно организовать несколькими способами.

Первый способ: итоговый тест по теме можно создать из тестов 10 и 11, используя часть заданий из каждого теста. Следует заметить, что в зависимости от уровня подготовки класса можно использовать более легкие задания тестов или более сложные. Полезно разобрать хотя бы одну из десяти задач как теста 10, так и теста 11, решение которых позволяет определить уровень сформированности умения применять изученные теоремы и требует достаточно высокой вычислительной культуры.

Второй способ: так как тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно из каждого теста выполнить по одному варианту устно.

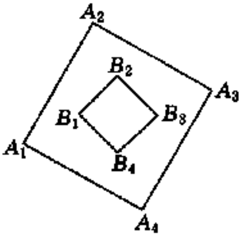
Первый способ более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся.

3°. В контрольной работе первые три задачи — это задачи с выбором ответа и с кратким ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задачах 4 и 5 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

В учебном процессе рабочую тетрадь можно использовать как конспект темы и просматривать решение опорных задач. Поскольку в рабочей тетради по каждому пункту темы дано избыточное число задач, то из нерешенных в процессе изучения темы задач можно сделать подборку для урока повторения.

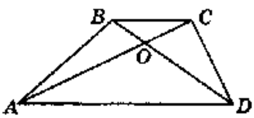
Контрольная работа по теме «Подобие треугольников» (1 ч)

1-й вариант



1. Квадраты $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ подобны. Коэффициент подобия равен 4. Найдите периметр квадрата $A_1A_2A_3A_4$, если $B_1B_2 = 3$ см.

Ответ: ______________________



2. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, которая делит диагональ AC на отрезки $OC = 6$ см и $OA = 12$ см. Найдите диагональ BD, если $OB = 6$ см.

Ответ: 1) 6 см; 2) 18 см; 3) 12 см; 4) 24 см.

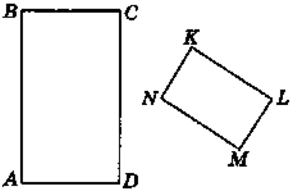
3. Определите, вершинами какого четырехугольника являются середины сторон прямоугольника, отличного от квадрата:

1. *параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба;*
2. *прямоугольник, отличный от квадрата;*
3. *ромб, отличный от квадрата;*
4. *квадрат.*

4. В треугольнике проведена средняя линия. Найдите площадь полученной трапеции, если основание треугольника равно 14 см, а высота — 12 см.

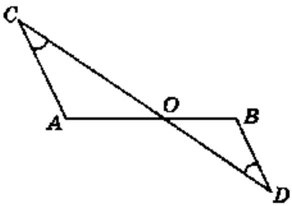
5. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит данный треугольник на два треугольника, один из которых подобен данному. Найдите углы исходного треугольника.

2-й вариант



1. Прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ подобны. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если $BC = 6$ см, $KL = 4$ см, а $LM = 3$ см. Сколько решений имеет задача?

Ответ: ______________________



2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $\angle ACO = \angle BDO$. Найдите длину отрезка AB, если $OB = 6$ см, $OC = 10$ см, $OD = 5$ см.

Ответ: 1) 15 см; 2) 12 см; 3) 18 см; 4) 20 см.

3. Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон трапеции, если ее диагонали перпендикулярны и не равны:

1. *параллелограмм, отличный от прямоугольника;*
2. *прямоугольник, отличный от квадрата;*
3. *ромб, отличный от квадрата;*
4. *квадрат.*

4. В прямоугольном треугольнике, у которого катеты равны 10 см и 24 см, проведена средняя линия, параллельная большему катету. Найдите площадь полученной трапеции.

5. В произвольном треугольнике один из углов равен 40°. Биссектриса этого угла делит данный треугольник на два треугольника, один из которых подобен данному. Найдите наибольший угол исходного треугольника.

ГЛАВА VIII. ОКРУЖНОСТЬ (14 ч)

Содержание главы составляет материал, традиционный для любого курса планиметрии: взаимное расположение прямой и окружности; касательная к окружности; центральные и вписанные углы; вписанная и описанная окружности.

С понятиями окружности и ее элементов: радиус, хорда, диаметр, центр и дуга — учащиеся уже встречались как в курсе математики, так и в параграфе 4 главы II. Поэтому вполне достаточно беглого повторения в ходе выполнения устных упражнений по готовому чертежу.

Определение касательной к окружности, используемое в данном курсе, — традиционно. Касательная к окружности определяется как прямая, имеющая *единственную общую* точку с окружностью. Перпендикулярность же касательной и радиуса окружности, проведенного в точку касания, формулируется и доказывается как теорема.

Планируемые итоговые результаты изучения главы VIII. Учащиеся должны научиться:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках вписанные и описанные окружности, касательные к окружности, центральные и вписанные углы;
– выделять в конфигурации, данной в условии задачи, вписанные и описанные окружности, касательные к окружности, центральные и вписанные углы;
– формулировать и иллюстрировать определения вписанных и описанных окружностей, касательных к окружности, центральных и вписанных углов;
– формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о свойстве и признаке касательной;
– формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему о вписанном угле и следствия из нее;
– формулировать и доказывать теорему о свойствах отрезков пересекающихся хорд окружности;
– формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о вписанных в треугольник и описанных около треугольника окружностях и следствия из них;
– формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о свойствах вписанных в окружность и описанных около окружности многоугольниках;

- формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о свойствах биссектрисы угла, серединного перпендикуляра к отрезку и следствия из них;
- устанавливать взаимное расположение прямой и окружности;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ определения вписанных и описанных окружностей, касательных к окружности, центральных и вписанных углов;
  - ➢ свойства биссектрисы угла, серединного перпендикуляра к отрезку и следствия из них;
  - ➢ теорему о вписанном угле и следствия из нее;
  - ➢ свойство точки пересечения медиан, биссектрис, высот, серединных перпендикуляров к отрезку;
  - ➢ теорему о свойствах отрезков пересекающихся хорд окружности;
  - ➢ алгебраический аппарат.
- применять при решении задач на построение:
  - ➢ свойство биссектрисы угла и серединного перпендикуляра быть геометрическим местом точек.

Учащиеся получат возможность научиться:

♦ *применять метод геометрического места точек для решения задач на вычисления и доказательства;*

♦ *решать задачи на построение методом геометрического места точек;*

♦ *проводить доказательные рассуждения при определении взаимного расположения прямой и окружности.*

§ 1. Касательная к окружности (2 ч)

Комментарий для учителя

В данном курсе геометрии вводится традиционное определение касательной. После чего доказываются признак касательной и ее основное свойство: быть перпендикулярной к радиусу, проведенному в точку касания. С методической точки зрения такое определение касательной очень удобно при решении задач, поскольку наличие касательной в условии задачи позволяет сразу сделать вывод о существовании перпендикулярного ей радиуса.

Текущие результаты изучения §1. Учащиеся должны научиться:

- изображать, обозначать и распознавать па чертежах и рисунках касательные к окружности;
- выделять в конфигурации, данной в условии задачи, касательные к окружности;
- формулировать и иллюстрировать определение касательной к окружности;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о свойстве и признаке касательной;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему о вписанном угле и следствия из нее;
- устанавливать взаимное расположение прямой и окружности;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ определение касательной к окружности;
  - ➢ свойство и признак касательной;
  - ➢ алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. *Понятия* окружности, ее радиуса, диаметра, центра и дуги уже знакомы учащимся из курса седьмого класса. С целью повторения и закрепления этих понятий можно предложить учащимся следующие устные задачи и вопросы по готовому рисунку (рис. 112):

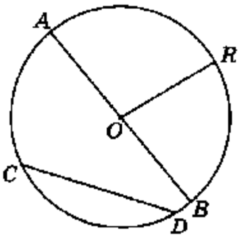


Рис. 112

1) Назовите центр окружности, ее радиус и диаметр.

2) Радиус окружности равен 7 см. Чему равен диаметр этой окружности?

3) Диаметр окружности равен 25 см. Чему равен ее радиус?

4) Назовите хорду и дугу окружности.

Затем, используя рисунок 113, введем данные в пункте 68 учебника обозначения и проведем исследование *взаимного расположения прямой и окружности* (рис. 113).

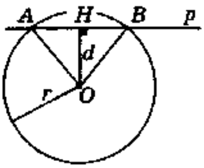
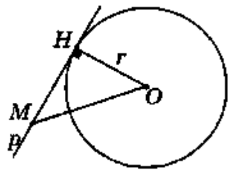
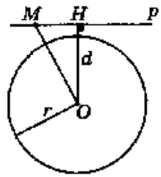
 а) *Если $d < r$, то прямая и окружность имеют две общие точки.*	 б) *Если $d = r$, то прямая и окружность имеют одну общую точку.*	 в) *Если $d > r$, то прямая и окружность не имеют общих точек.*

Рис. 113

Схему, приведенную на рисунке 113 и отражающую итоги обсуждения *взаимного расположения прямой и окружности*, полезно записать в тетради учащихся.

Для того чтобы проверить уровень усвоения *взаимного расположения прямой и окружности*, можно выполнить упражнения 631 а), г) и д) и 633 из учебника устно по чертежу, иллюстрирующему условие.

2°. Определение *касательной* к окружности полезно ввести по аналогии с введением *секущей* при исследовании случая $d = r$ *взаимного расположения прямой и окружности*. При этом важно подчеркнуть, что сами названия и *секущей*, и *касательной* отражают их смысл. *Секущая* <u>пересекает</u> окружность, значит, две ее точки лежат на окружности и часть прямой находится внутри окружности, т.е. является хордой. *Касательная* <u>касается</u> окружности и имеет *единственную общую точку* с окружностью.

В задаче 1 из дополнительных задач методического пособия сформулировано полезное *свойство секущей*, которое можно использовать при решении задач. Ее можно решить устно, с опорой на неравенство треугольника.

> *При использовании рабочей тетради следует предложить учащимся в процессе исследования **взаимного расположения прямой и окружности** записать полученные выводы. После решения задач из учебника решить задачу 159, которая дублирует задачу 1 из дополнительных задач методического пособия.*

3°. Перед доказательством теорем, выражающих *свойство и признак касательной*, полезно напомнить учащимся понятия

прямой и обратной теорем. При этом следует еще раз обратить их внимание, что условие *прямой* теоремы «*...накрест лежащие углы равны...*» в *обратной* теореме является заключением, а заключение *прямой* теоремы «*...прямые параллельны*» в *обратной* теореме является условием. *Прямая* и *обратная* теоремы взаимно обратные.

Формулировки теорем, выражающих *свойство и признак касательной*, полезно сформулировать параллельно и выполнить краткую запись условий.

Свойство	Признак
Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Дано: *p — касательная к окружности;* *A — точка касания;* *OA — радиус окружности.* Доказать: $p \perp OA$ (рис. 115, *а*).	*Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.* Дано: *OA — радиус окружности;* $OA \perp p$ Доказать: *p — касательная к окружности.*

Рис. 114

При доказательстве *свойства касательной* используется *метод доказательства от противного*, поэтому полезно напомнить учащимся его алгоритм:

1) делаем предположение, противоположное тому, что надо доказать, т.е. заключение теоремы заменяется его отрицанием; запишем новое условие в предположении, что касательная не перпендикулярна радиусу:

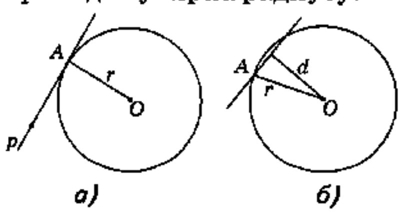


Рис. 115

Дано: *p — касательная к окружности;*
A — точка касания;
OA — радиус окружности;
p не перпендикулярна OA;

2) проводим рассуждения, опираясь на аксиомы и теоремы;

3) приходим к противоречию либо с условием задачи (теоремы), либо с одной из аксиом или ранее доказанных теорем, либо с определением какого-то понятия.

Далее доказательство проводится в соответствии с текстом учебника. По условию отрицания утверждения теоремы выполняется рисунок 115 без отрезка d. Затем по ходу доказательства рисунок дополняется, т.е. проводится перпендикуляр d.

После доказательства *свойства касательной*, используя определение расстояния от точки до прямой, провести доказательство *признака касательной*.

Для формирования умения применять *свойство касательной* можно использовать задачи 2 и 3 из дополнительных задач методического пособия. Затем решить следующую задачу.

> Из точки A к окружности с центром в точке O проведены две касательные AC и AB (B и C — точки касания). Докажите, что $AC = AB$ и $\angle ACO = \angle ABO$.

После обсуждения решения задачи сделать вывод в соответствии со следствием из *свойства касательной*.

Затем разобрать по тексту учебника решение задачи, приведенной после *признака касательной* и направленной на формирование умения применять *признак касательной*.

> *При использовании рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировки* свойства и признака касательной. *После доказательства теорем решить задачи 160–164. Затем решить задачу 165, сделать соответствующие выводы и записать на странице 74 рабочей тетради формулировку следствия из* свойства касательной. *Закрепить полученный вывод можно при решении задачи 166.*

Примерное планирование изучения материала

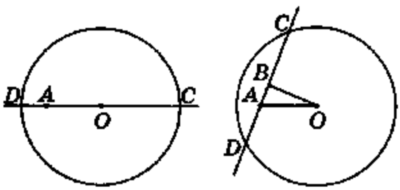
На первом уроке: в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 70 и определение касательной, решить задачи 631 а), г) и д) и 632; дома — вопросы 1–3 из вопросов для повторения к главе VIII и вопрос 16 из вопросов для повторения к главе IV, задачи 631 б) и 633.

На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 71, решить задачи 635 и 636 (устно), 637 и 639; дома — вопросы 4–7 из вопросов для повторения к главе VIII, задачи 638, 644, 645, 648.

Указания к задачам

Задачу 632 можно решить устно, выполняя по ходу решения чертежи (рис. 116). Поскольку в условии сказано, что «... *любая прямая, проходящая через точку A, является секущей...*», то необходимо рассмотреть сначала прямую, определяемую данной точкой и центром окружности. Тогда по определению прямая DC пересекает окружность в двух точках D и C — концах диаметра (рис. 116 а).

Теперь рассмотрим общий случай, когда центр окружности не лежит на прямой, проходящей через точку A.

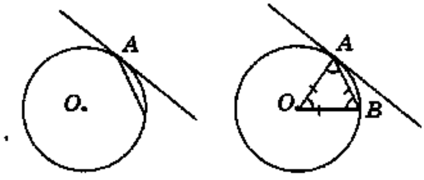


а) б)

Рис. 116

Опустим перпендикуляр OB на прямую DC. $OB < OA$ по построению. По условию расстояние от центра окружности до точки A меньше радиуса окружности, значит, и OB меньше радиуса окружности. Значит, любая прямая, проходящая через точку А, является секущей (рис. 116 б).

Задачи 635 и 636 можно решить устно. По условию **задачи 635** сделать чертеж (рис. 117 а), затем выполнить дополнительное построение и отметить на рисунке равные элементы (рис. 117 б).



а) б)

Рис. 117

После этого решение становится очевидным. При этом полезно обратить внимание учащихся на условие задачи, в котором сказано, что хорда равна радиусу, и это подсказывает, какое дополнительное построение необходимо выполнить для нахождения угла. После этого приступить к решению **задачи 636**. Проведем на рисунке 117 б) касательную в точке B (рис. 118). После этого решение **задачи 636** становится продолжением решения **задачи 635**.

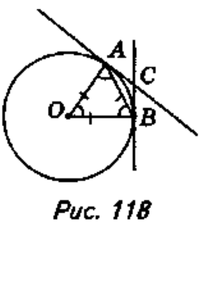


Рис. 118

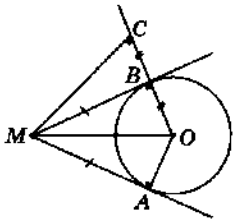


Рис. 119

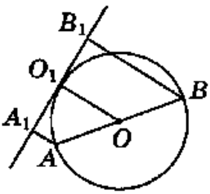


Рис. 120

Задачи 638–640 являются задачами на решение прямоугольных треугольников и свойство касательной.

При решении задач 641, 643–645 необходимо уделить внимание построению чертежей.

Из чертежа (рис. 119) к задаче 641 хорошо видно, что $AO = 2r$, а $OB = r$. После выполнения чертежа к задаче 643 (рис. 120) видно, что для решения достаточно применить следствие из свойства касательной и определить, что треугольник BAC — равносторонний.

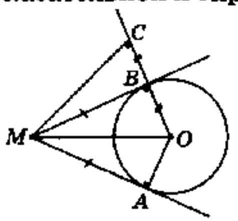


Рис. 121

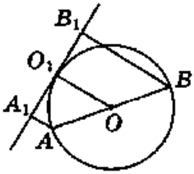


Рис. 122

Из чертежа к задаче 644 (рис. 121) видно равенство трех треугольников: $\Delta MOA = \Delta MOB$ в силу следствия из свойства касательной; $\Delta MCB = \Delta MOB$ как прямоугольные треугольники по двум катетам. Отсюда следует $\angle AMC = 3\angle AMO$.

Рисунок 122 отражает условие задачи 645. Для ее решения достаточно применить теорему Фалеса (задача 385).

Дополнительные задачи

1. Объясните, почему часть секущей, заключенная внутри окружности, больше у той секущей, которая проходит через центр окружности.

2. К окружности радиуса 10 см проведена касательная, на которой взята точка M на расстоянии 24 см от точки касания. Найдите расстояние от точки M до центра окружности.

3. Из точки M, отстоящей от центра окружности на расстоянии 29 см, проведена касательная $KM = 21$ см, где K — точка касания. Найдите радиус окружности.

§2. Центральные и вписанные углы (3 ч)

Комментарий для учителя

В этом пункте учащиеся знакомятся с новым понятием, а именно с *вписанными углами*. Доказательство теоремы о *вписанном угле* опирается на понятие *центрального угла*. Поэтому предварительно вводится понятие *центрального угла* и устанавливается соответствие между *дугами окружности* и *центральными углами*.

Здесь же учащиеся знакомятся со свойством отрезков пересекающихся хорд окружности. Доказательство теоремы о свойстве пересекающихся хорд окружности опирается на подобие треугольников. Поэтому никаких новых понятий предварительно вводить не надо, что значительно упрощает объяснение вводимого свойства и его усвоение учащимися.

Текущие результаты изучения §2. Учащиеся должны научиться:

- изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках центральный угол и дугу окружности, соответствующую данному центральному углу; вписанный угол и дугу окружности, соответствующую данному вписанному углу;
- выделять в конфигурации, данной в условии задачи, центральные и вписанные углы;
- формулировать и объяснять определения центрального угла и дуги окружности, соответствующей данному центральному углу; вписанного угла и дуги окружности, соответствующей данному вписанному углу;
- формулировать и доказывать теорему о вписанных углах и следствия из этой теоремы;
- формулировать и доказывать теорему о пересекающихся хордах окружности;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ определения центрального и вписанного углов;
  - ➢ теорему о вписанных углах и следствия из нее;
  - ➢ теорему о пересекающихся хордах окружности;
  - ➢ алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Понятие *«дуга»* уже было введено в §4 главы II. Здесь важно обратить внимание учащихся на то, что всегда существуют две дуги AB, и при этом одна из них *больше полуокружности*, а другая *меньше полуокружности* (рис. 123).

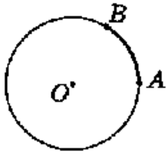


Рис. 123

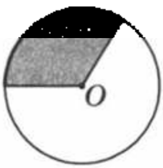


Рис. 124

2°. Понятие *«центральный угол»*, как и понятие *«дуга»*, вводится на наглядном уровне с опорой на рисунок 124. При этом следует отметить, что центральный угол является углом с вершиной в центре окружности. Отсюда следует, что всегда существуют два *центральных угла*. Затем устанавливается соответствие между *дугами окружности* и *центральными углами*. Для этого выделяется (цветом или более жирной линией) часть окружности, расположенная внутри центрального угла, которая называется *дугой окружности*, соответствующей данному *центральному углу*. *Градусной мерой дуги окружности* называют *градусную меру* соответствующего *центрального угла*.

Следует особо подчеркнуть, что сумма *градусных мер дуг* с общими концами равна 360°.

Для формирования умения находить *градусную меру центральных углов* и *градусную меру дуг* рекомендуется выполнить работу по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунках 125 и 126.

> 1. Найдите градусную меру центральных углов, обозначенных буквами: α, β, δ, ξ, τ и φ.

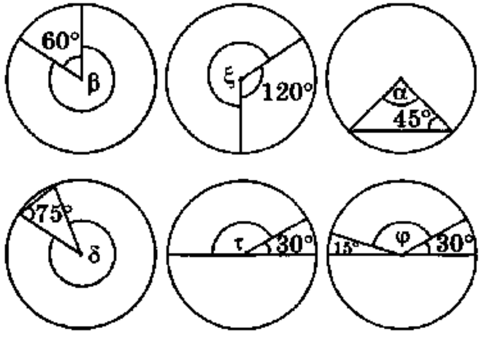


Рис. 125

2. Найдите градусную меру дуг окружностей, соответствующих углам, отмеченным на рисунках.

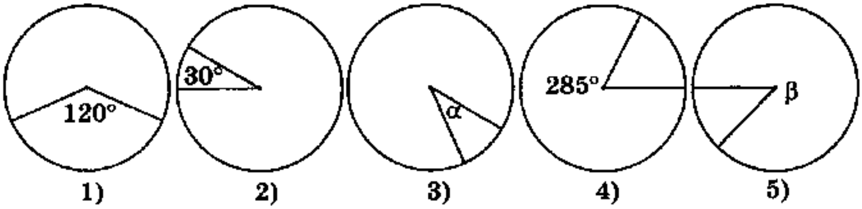


Рис. 126

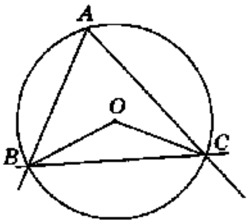


Рис. 127

3°. Понятие «*вписанный угол*» полезно ввести конструктивно, т.е. показать учащимся, что *вписанный* угол можно построить следующим образом: отметим на окружности некоторую точку A, из точки A проведем два луча: AB и AC, пересекающие окружность в точках B и C (рис. 127). Получим угол BAC. Такой угол называется *вписанным углом*.

Здесь следует обратить внимание на два важных момента: первое — вершина угла лежит на окружности и второе — стороны угла пересекают окружность. После этого сформулировать вербальное определение *вписанного угла*. На этом же рисунке можно показать *дугу*, соответствующую построенному *вписанному углу*. На формирование умения соотносить *вписанный угол* с соответствующей ему *дугой* полезно выполнить следующие упражнения.

1. Нарисуйте несколько вписанных углов, соответствующих данной на рисунке дуге (рис. 128).
2. Выделите дугу, соответствующую данному на рисунке 129 вписанному углу.

Рис. 128

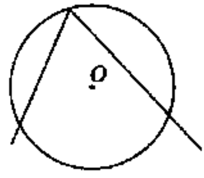


Рис. 129

При этом следует отметить, что для данной *дуги* существует как угодно много *вписанных* углов, а для данного *вписанного* угла — только одна *дуга*.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует по ходу введения понятий дуги окружности, центрального угла, градусной меры дуги окружности, вписанного угла *предложить учащимся записать их формулиров-*

ки в отведенных для этого местах и выполнить соответствующие задания. Причем задачи 168 и 170 являются полным аналогом работы с плакатами (рис. 125 и 126). Использование рабочей тетради именно в данной теме позволяет сэкономить время учителя при подготовке к уроку, а также время и на самом уроке, и выполнить большее число заданий на усвоение введенной терминологии, тем более что в учебнике таких упражнений нет. При этом у школьников будет хороший конспект урока, который, несомненно, поможет при выполнении домашнего задания.

4°. Доказательство *теоремы о вписанном угле* достаточно просто, поэтому его можно провести с активным привлечением учащихся. Если позволяет уровень знаний учащихся, то его можно провести по следующему сценарию. Сначала предложить решить на доске задачу:

Сторона BC вписанного угла ABC является диаметром окружности с центром в точке O. Выразите градусную меру угла ABC через соответствующую ему дугу (рис. 130).

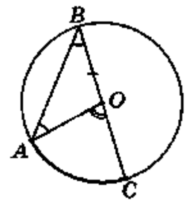


Рис. 130

Решение можно выполнить устно, с записью его результата: $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AC$. Затем по чертежам, аналогичным рисункам 218 б) и в) из учебника, разобрать два других случая расположения сторон вписанного угла относительно центра окружности.

После разбора всех случаев расположения центра окружности относительно сторон вписанного угла — на стороне угла, внутри угла, вне угла — можно сделать обобщение в виде формулировки теоремы о вписанном угле.

Следует обратить внимание учащихся, что в учебной литературе встречается другая формулировка теоремы о вписанном угле: «*Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла*».

Для закрепления формулировки теоремы о вписанном угле можно предложить устно решить задачу 653 и следующие задания:

По данным рисунка 131 найдите градусную меру углов, обозначенных буквами: α, β, η, σ, τ, ξ и φ.

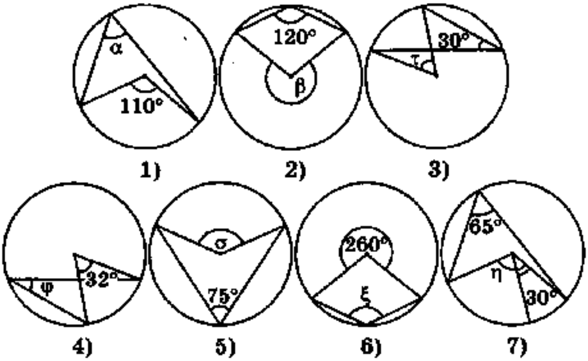


Рис. 131

Поскольку раньше было отмечено, что для данной *дуги* существует как угодно много *вписанных* углов, теперь заметим, что все эти углы равны.

Затем можно предложить учащимся решить устно задачу по готовому чертежу:

> Докажите, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.

Понятие вписанного угла и теоремы об измерении вписанного угла позволяют доказать утверждения об измерении *углов*, связанных с окружностью.

> 1. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит внутри окружности, равна полусумме градусных мер дуг, из которых одна заключена между его сторонами, а другая — между продолжениями сторон (задача 6 в дополнительных задачах методического пособия с решением).
> 2. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит вне окружности, а стороны пересекают окружность, равна полуразности градусных мер дуг, заключенных между его сторонами.
> 3. Докажите, что градусная мера угла, образованного касательной и хордой, равна половине градусной меры дуги, заключенной внутри него.

Доказанные утверждения найдут свое применение в дальнейшем в курсе как планиметрии, так и стереометрии.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы о вписанном угле. *В рабочей тетради рекомендуется устно решить задачи 173–176, а также 178–180. Причем задание 174 является полным аналогом работы с плакатом (рис. 131). Часть из них дана в дополнительных задачах методического пособия, но использование их на уроке без тетради затруднено ввиду сложности чертежей.*

5°. Доказательство *теоремы о пересекающихся хордах окружности* достаточно просто и не требует комментариев. Его можно рекомендовать для самостоятельной работы учащихся.

После разбора утверждения о свойстве пересекающихся хорд полезно предложить учащимся следующую задачу.

Точка A лежит внутри окружности радиуса R на расстоянии a от ее центра — точки O. Хорда BC проходит через точку A. Докажите, что произведение $BA \cdot AC$ является величиной, постоянной для данной окружности и данной точки в этой окружности и равно $R^2 - a^2$.

6°. Решение задач 660–664 будет проще, если сначала решить задачи 6–9 из дополнительных задач методического пособия. Решение одной из этих задач следует записать в тетрадях учащихся. Остальные можно выполнить устно по чертежам на доске.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 72; решить задачи 649 а), 651 а) и 650; дома — вопросы 8–10 из вопросов для повторения к главе VIII, задачи 649 б), в) и г), 651 б) и 652.

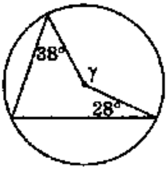
На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 73; решить задачи 653, 655, 664 и 671; дома — вопрос 11–14 из вопросов для повторения к главе VIII, задачи 656, 660, 662, и 663.

На третьем уроке в классе — провести самостоятельную работу по теме «*Центральные и вписанные углы*», решить задачи 668, 672 и 673 разобрать по тексту учебника; дома — задачи 661, 665, 669 и 670.

Самостоятельная работа по теме «Центральные и вписанные углы»

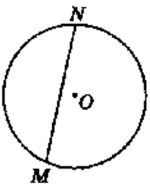
Самостоятельная работа планируется на 10 мин.

1-й вариант



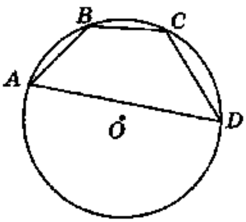
1°. По данным рисунка найдите градусную меру угла, обозначенного буквой γ.

Ответ: ______________________



2. Хорда разбивает окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 4 : 5. Под каким углом видна эта хорда из точек большей дуги?

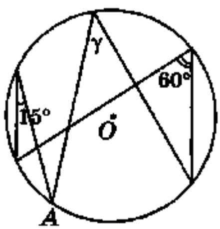
Ответ: ______________________



3. В окружность с центром в точке O вписан четырехугольник $ABCD$. Найдите больший угол этого четырехугольника, если $\angle AOB = 40°$, $\angle BOC = 50°$, $\angle COD = 60°$.

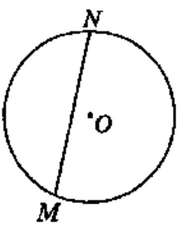
Ответ: ______________________

2-й вариант



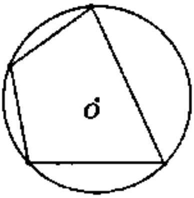
1. По данным рисунка найдите градусную меру угла γ.

Ответ: ______________________



2. Хорда разбивает окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 1 : 2. Определите, под каким углом видна эта хорда из точек меньшей дуги.

Ответ: ______________________



3. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности и разбивают ее на четыре дуги, градусные меры которых последовательно относятся как 3 : 7 : 5 : 3. Найдите больший угол четырехугольника.

Ответ: ______________________

Указания к задачам

В условии задач **651 а)** и **659** сформулированы полезные при решении задач геометрические факты, а именно в окружности: *«равные хорды стягивают равные дуги»* (задача **651 а)**) и *«дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны»* (задача **659**).

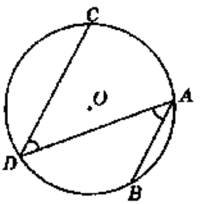


Рис. 132

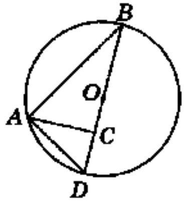


Рис. 133

После выполнения чертежа к задаче 659 видно, что для ее решения достаточно применить свойство углов при параллельных прямых (рис. 132).

Решение задачи **665** следует из следствия 2 теоремы о вписанном угле. Точка C делит полуокружность на две части, на одну из которых опирается угол с вершиной в точке A, а на другую — с вершиной в точке B. Угол с вершиной в точке C опирается на полуокружность. Отсюда следует утверждение задачи.

После выполнения дополнительного построения (две хорды AB и AD) в задаче **668** ее решение следует из свойства высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла (рис. 133).

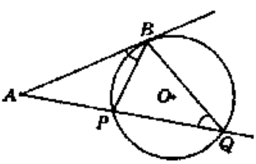


Рис. 134

Выполнить дополнительное построение (две хорды BQ и BP) в задаче **670**. Треугольники ABQ и ABP подобны по двум углам (рис. 134).

$\angle ABP = \dfrac{1}{2} \cup PB$ в силу решения задачи 8 из дополнительных задач методического посо-

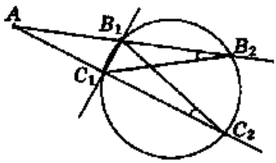


Рис. 135

бия и $\angle BQP = \frac{1}{2} \cup PB$ по теореме о вписанном угле. $\angle A$ — общий. Отсюда $\frac{AB}{AQ} = \frac{AP}{AB}$.

Решение задачи 672 аналогично решению задачи 670. Результат следует из подобия треугольников AB_1C_2 и AC_1B_2 (рис. 135).

Дополнительные задачи

1. Чему равна градусная мера дуги окружности, если соответствующий центральный угол равен: а) 27°; б) 13°; в) 335°?

2. Окружность разделена на две дуги, причем градусная мера одной из них в три раза больше градусной меры другой. Сколько градусов содержат соответствующие центральные углы?

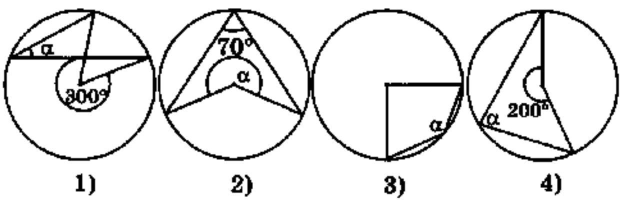


Рис. 136

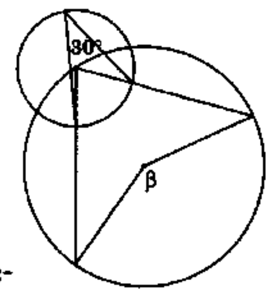


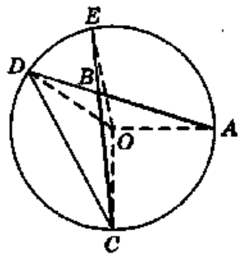
Рис. 137

3. По данным рисунка 136 найдите градусную меру углов, обозначенных буквой α.

4. По данным рисунка 137 найдите градусную меру угла, обозначенного буквой β.

5. Вписанный угол на 25° меньше центрального, опирающегося на ту же дугу. Найдите градусные меры этих углов.

6. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит внутри окружности, равна полусумме градусных мер дуг, из которых одна заключена между его сторонами, а другая — между продолжениями сторон.



__Дано: *Точка B лежит внутри окружности.*__

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle DOE$.

Решение.

Проведем хорду DC (см. рис.). *Рассмотрим ΔDBC. $\angle ABC$ является внешним углом ΔDBC при вершине* B. *В силу теоремы о внешнем угле треугольника: $\angle ABC = \angle BDC + \angle BCD$.*

Углы $\angle BDC$ и $\angle BCD$, как вписанные, равны половинам соответствующих центральных углов, то есть $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle DOE$. В свою очередь градусная мера дуги AC равна градусной мере $\angle AOC$, а градусная мера дуги DE равна градусной мере $\angle EOD$. Следовательно, градусная мера $\angle ABC$ равна полусумме градусных мер дуг, из которых одна заключена между его сторонами, а другая — между продолжениями сторон. Что и требовалось доказать.

7. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит вне окружности, а стороны пересекают окружность, равна полуразности градусных мер дуг, заключенных между его сторонами.

8. Докажите, что градусная мера угла, образованного касательной и хордой, равна половине градусной меры дуги, заключенной внутри его.

9. Докажите, что градусная мера угла, образованного двумя касательными, проведенными из одной точки к окружности, равна полуразности градусных мер дуг, заключенных между точками касания.

§3. Четыре замечательные точки треугольника (2 ч)

Комментарий для учителя

Материал, представленный в параграфе, является традиционным для курса планиметрии: свойства биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку, четыре замечательные точки треугольника. Каждый треугольник имеет несколько точек, обладающих специфическими свойствами. Здесь рассматриваются четыре: точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, точка пересечения высот треугольника и точка пересечения медиан треугольника. Задача о точке пересечения медиан треугольника была рассмотрена в §3 главы VIII. Материал параграфа несложен и может быть рекомендован для самостоятельного изучения под руководством учителя.

Текущие результаты изучения §3. Учащиеся должны научиться:

- изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках биссектрисы, медианы, высоты, серединные перпендикуляры к отрезку;
- выделять в конфигурации, данной в условии задачи, биссектрисы, медианы, высоты, серединные перпендикуляры к отрезку;
- формулировать и объяснять определение серединного перпендикуляра к отрезку;
- формулировать и доказывать теоремы о свойствах биссектрисы угла и следствия из этой теоремы;
- формулировать и доказывать теоремы о свойствах серединного перпендикуляра к отрезку и следствия из этой теоремы;
- формулировать и доказывать теорему о пересечении высот треугольника;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ определения биссектрисы, медианы, высоты, серединных перпендикуляров к отрезку;
  - ➢ теоремы о точках пересечения: биссектрис, высот и медиан треугольника, а также серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;

- свойство биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку быть геометрическим местом точек;
- алгебраический аппарат.

Ученик получит возможность:

♦ ***научиться решать задачи на построение, применяя свойство биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку быть геометрическим местом точек.***

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Перед началом рассмотрения материала параграфа полезно с использованием известных примеров напомнить учащимся понятия прямой и обратной теорем. С этой целью можно использовать плакат, приведенный на рисунке **78**. При этом следует еще раз обратить внимание, что условие прямой теоремы в *обратной* теореме является заключением, а заключение *прямой* теоремы в *обратной* теореме является условием. Прямая и обратная теоремы взаимно обратные. Заметим, что справедливость прямой теоремы не всегда означает справедливость обратной теоремы. Например, прямая теорема «*Вертикальные углы равны*». Условие: «*Вертикальные углы*», заключение: «*...углы равны*». Сформулируем обратную теорему: «*Если углы равны, то они вертикальные*», что неверно.

2°. После формулировки прямой теоремы о *биссектрисе угла*, следует предложить учащимся сформулировать обратную теорему. Затем выполнить чертеж на доске по условию теоремы (рис. 138),

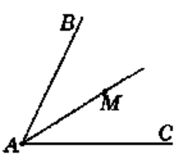


Рис. 138

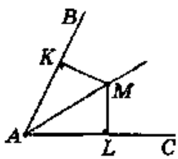


Рис. 139

после чего задать классу вопрос: «*Что называется расстоянием от точки до прямой?*» По определению расстояния от точки до прямой выполнить дополнительное построение (рис. 139).

Затем сделать краткую запись условия и заключения прямой и обратной теорем (рис. 140), при этом рисунок 138 отражает условие обратной теоремы, а рисунок 139 — ее утверждение. После чего фронтально доказать теорему и следствие из нее или разобрать доказательства по тексту учебника.

Прямая теорема	Обратная теорема
Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон. Дано: AM — *биссектриса* $\angle BAC$. Доказать: $KM = KL$	*Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.* Дано: $\angle BAC$; $KM = KL$. Доказать: AM — *биссектриса* $\angle BAC$

Рис. 140

2°. При введении определения *серединного перпендикуляра к отрезку* основное внимание учащихся необходимо обратить на те признаки, которые позволяют из всех прямых, пересекающих данный отрезок, выделить одну, а именно ту, которая перпендикулярна данному отрезку и делит его пополам. Другими словами, если в условии сказано: «*...прямая m — серединный перпендикуляр к отрезку AB...*», то учащиеся должны уметь записать: $m \perp AB$ и $KA = KB$, где K — точка пересечения прямой m и отрезка AB.

3°. Методика изложения теоремы о *серединном перпендикуляре к отрезку* аналогична методике изложения теоремы о *биссектрисе угла*. После того как будут сформулированы прямая и обратная теоремы, сделаны краткие записи условия и заключения (рис. 141), выполнены чертежи (рис. 142 и 143), можно предложить учащимся самостоятельно доказать утверждения теорем или разобрать доказательства по тексту учебника.

Прямая теорема	Обратная теорема
Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов. Дано: $m \perp AB$; $O \in m$; $O \in AB$, $M \in m$; $OA = OB$. Доказать: $MA = MB$.	*Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.* Дано: $MA = MB$; $O \in AB$; $O \in m$; $M \in m$. Доказать: $m \perp AB$; $OA = OB$.

Рис. 141

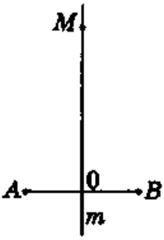


Рис. 142

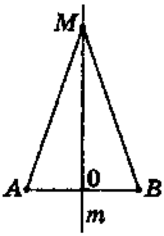


Рис. 143

Доказательство следствия из теоремы о *серединном перпендикуляре* полезно разобрать фронтально. Несмотря на то, что метод доказательства от противного используется при доказательстве теорем и решении задач уже достаточно давно, часть учащихся испытывают затруднения при его применении. Поэтому после выполнения чертежа и краткой записи условия (рис. 144) можно задать вопрос: «*Каким утверждением нужно заменить утверждение следствия?*» После того как будет сформулировано предположение о параллельности *серединных перпендикуляров*, условие следствия записать с включением в него еще и условия $m \parallel n$.

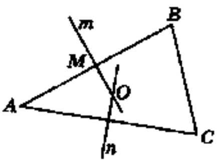
	Дано: ΔABC; $m \perp AB$, $MA = MB$; $n \perp BC$, $NC = NB$. Доказать: $O \in m$; $O \in n$.	Новое условие: Дано: ΔABC $m \perp AB$, $MA = MB$; $n \perp BC$, $NC = NB$. $m \parallel n$

Рис. 144

Теперь, исходя из нового условия, проводим рассуждения, опираясь на теорему о *прямой, перпендикулярной данной* (глава II, пункт 16), и приходим к противоречию.

3°. Перед формулировкой теоремы о *точке пересечения высот* полезно решить устно по готовым чертежам задачи:

1. Через каждую вершину треугольника ABC проведены прямые, параллельные противолежащим сторонам (рис. 145). Докажите, что в треугольнике $A_2B_2C_2$ стороны треугольника ABC являются средними линиями.

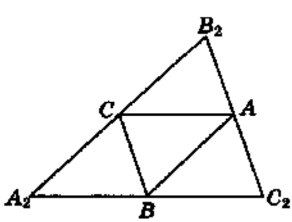


Рис. 145

2. Докажите, что на рисунке 146 высоты треугольника ABC являются серединными перпендикулярами треугольника $A_2B_2C_2$.

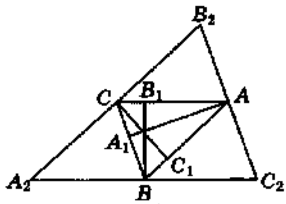


Рис. 146

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует по ходу изучения теорем о **биссектрисе угла**, о **серединном перпендикуляре** и следствий из них предложить учащимся записать их формулировки и выполнить соответствующие задания 189 и 190.*

3°. В данной теме возможны два варианта планирования: первый предполагает изучение всего учебного материала параграфа на одном уроке в ходе фронтальной беседы с учащимися, а второй урок — решение задач; второй — разделить теоретический материал между уроками в соответствии с его делением по пунктам учебника. Если уровень геометрической подготовки класса не позволяет такое плотное изучение материала, можно один урок добавить из резервного времени.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал параграфа 3; дома — вопросы 15–20 из вопросов для повторения к главе VIII, задачи 674, 676 а), 679 а) и 682.

На втором уроке в классе — разобрать по тексту учебника решение задачи 686, решить задачи 675, 677, 678 а), 685 и 688; дома — задачи 678 б), 679, 680 и 687.

Указания к задачам

Задача 675. Так как данные окружности касаются сторон угла O, то $O_1D_1 = O_1C_1$ и $O_2D_2 = O_2C_2$ (рис. 147). По обратной теореме о биссектрисе угла точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе угла. Следовательно, точки O, O_1 и O_2 лежат на одной прямой. Так как прямая m — общая касательная к данным окружностям в точке их касания, то $O_1A \perp m$ и $O_2A \perp m$.

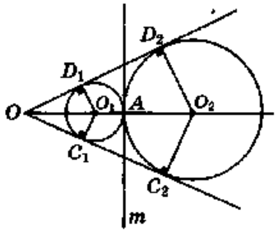


Рис. 147

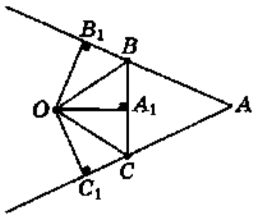


Рис. 148

Следовательно, точки A, O_1 и O_2 лежат на одной прямой. Отсюда следует, что точки O_1 и O_2 лежат на прямой AO.

Решение <u>задачи 677</u> следует из рисунка 148, где точки A_1, B_1 и C_1 являются точками касания. Треугольники OBB_1 и OBA_1 и треугольники OCC_1 и OCA_1 равны как прямоугольные треугольники по гипотенузе и острому углу. Отсюда $OB_1 = OA_1 = OC_1$ и $OB_1 \perp AB$, $OA_1 \perp BC$, $OC_1 \perp AC$. Следовательно, окружность с центром в точке O касается AB, BC, и AC.

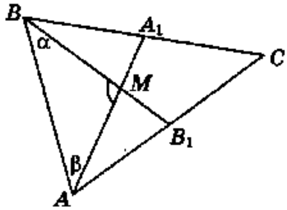


Рис. 149

Решение <u>задачи 678</u> следует непосредственно из рисунка 149. В треугольнике ABC отрезки AA_1 и BB_1 — биссектрисы, а M — точка их пересечения. $\angle\alpha + \angle\beta = 180° - 136° = 44°$. Отсюда $\angle ACB = 180° - 88° = 92°$.

При решении <u>задачи 680</u> следует для доказательства первой части воспользоваться следствием из теоремы о серединном перпендикуляре. Для доказательства второй части необходимо доказать, что треугольники ADC и ADB — равнобедренные. Для этого следует применить теорему о серединном перпендикуляре (рис. 150).

При решении <u>задачи 681</u> также применяется теорема о серединном перпендикуляре для доказательства того, что треугольник ABE — равнобедренный (рис. 151).

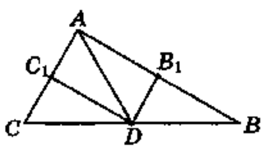


Рис. 150

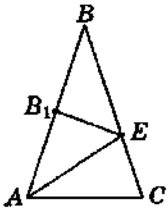


Рис. 151

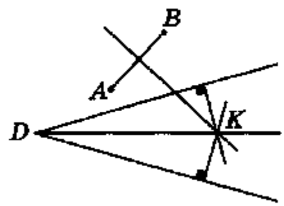


Рис. 152

По определению равнобедренного треугольника $AE = BE$, и, значит, $AE + CE = BC$.

В задаче 683 нужно применить метод от противного — предположить, что AM — высота, что приведет к противоречию с теоремой о серединном перпендикуляре.

Задача 687. Ее решение следует из утверждения теоремы о серединном перпендикуляре: все точки, равноудаленные от двух данных точек, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку. При этом следует обратить внимание учащихся на то, что прямая a и серединный перпендикуляр могут быть параллельны, и тогда задача не имеет решения.

Задача 688. Ее решение следует из утверждений теорем о биссектрисе угла и серединном перпендикуляре к отрезку: все точки, равноудаленные от сторон угла, лежат на его биссектрисе; а все точки, равноудаленные от двух данных точек, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку, концами которого являются эти точки. Искомая точка является точкой пересечения биссектрисы данного угла и серединного перпендикуляра к данному отрезку (рис. 152). Как и в задаче 687, следует исследовать вопрос: всегда ли задача имеет решение?

Дополнительные задачи

1. Определите, может ли вершина треугольника быть точкой пересечения высот данного треугольника.

2. Определите, как расположена точка пересечения серединных перпендикуляров для:

1) остроугольного треугольника;

2) тупоугольного треугольника;

3) прямоугольного треугольника.

§4. Вписанная и описанная окружности (4 ч)

Комментарий для учителя

Традиционным для курса планиметрии является материал, связанный с *окружностями, вписанными в треугольник*, и *окружностями, описанными около треугольника*, понятиями *многоугольников, вписанных в окружность*, и *многоугольников, описанных около окружности*. Свойства и признаки *вписанных* и *описанных четырехугольников* присутствуют практически во всех известных курсах планиметрии и весьма полезны при решении задач. Доказательство признаков *вписанных* и *описанных четырехугольников* достаточно сложно, и учителю следует самому изложить весь изучаемый материал с минимальным привлечением учащихся.

Текущие результаты изучения §4. Учащиеся должны научиться:

– изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках многоугольники, вписанные в окружность и описанные около окружности;
– выделять в конфигурации, данной в условии задачи, многоугольники, вписанные в окружность и описанные около окружности;
– описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и, наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок;
– формулировать и иллюстрировать определения вписанных в окружность и описанных около окружности многоугольников;
– формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о свойствах и признаке вписанных в треугольник и описанных около треугольника окружностях и следствия из них;
– формулировать, иллюстрировать и доказывать теоремы о свойствах и признаках вписанных в окружиость и описанных около окружности многоугольников;
– вербально формулировать формулу площади треугольника через радиус вписанной окружности;
– применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  ➢ определения вписанных и описанных окружностей;
  ➢ формулу площади треугольника через радиус вписанной окружности;
  ➢ алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. При введении определений *окружности, вписанной в многоугольник*, и *многоугольника, описанного около окружности*, полезно обратить внимание учащихся на то, что эти определения взаимно обратны, то есть, если в условии сказано: «*...окружность, вписанная в многоугольник...*», то это означает, что задан и *многоугольник, описанный около этой окружности*, и наоборот.

2°. Доказательство теоремы *об окружности, вписанной в треугольник*, достаточно просто, поэтому его можно провести фронтально с активным привлечением учащихся, с выполнением чертежа (рис. 153) и краткой записью условия и заключения теоремы на доске:

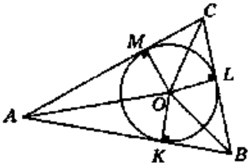


Рис. 153

Дано: ΔABC — *треугольник*;
О — *точка пересечения биссектрис.*

Доказать: *O — центр окружности, вписанной в* ΔABC.

Или можно сформулировать теорему в виде задачи и предложить выполнить ее решение хорошо успевающему ученику.

В *теореме об окружности, вписанной в треугольник*, фактически доказывается, что центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис.

После доказательства теоремы *об окружности, вписанной в треугольник*, полезно обратить внимание учащихся на тот факт, что центр *вписанной в треугольник окружности* (точка O) равноудален от сторон этого треугольника, то есть $OK = OL = OM$ (рис. 153).

Замечание о том, что в треугольник *можно вписать только одну окружность*, можно предложить учащимся самостоятельно разобрать по тексту учебника, заметив, что доказательные рассуждения проводятся от противного.

После доказательства теоремы об *окружности, вписанной в треугольник*, следует в ходе решения нижеприведенной задачи и задачи 701 из учебника исследовать вопрос о положении центра *вписанной окружности* в зависимости от вида треугольника. Их решение поможет при решении задач 689 и 690 из учебника.

Докажите, что центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, лежит на высоте, проведенной к его основанию.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать определения ***окружности, вписанной в многоугольник,*** *и* ***многоугольника, описанного около окружности,*** *формулировку теоремы* ***об окружности, вписанной в треугольник.*** *На применение теоремы об* ***окружности, вписанной в треугольник,*** *полезно предложить учащимся решить задачи 193 и 194. Задача 193 полностью совпадает с вышеприведенной задачей. Однако поскольку тетрадь позволяет экономить время на уроке, то ее предлагается решить письменно.*

3°. Перед рассмотрением свойства *четырехугольника, описанного около окружности*, полезно вспомнить свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности.

На прямое применение свойства *четырехугольника, описанного около окружности*, можно решить задачу 695.

После рассмотрения свойства *четырехугольника, описанного около окружности*, следует предложить учащимся сформулировать признак *четырехугольника, описанного около окружности*. При этом необходимо подчеркнуть, что свойство и признак *четырехугольника, описанного около окружности*, являются обратными теоремами. Полезно выполнить на доске краткую запись условия и заключения обеих теорем (рис. 162).

Прямая теорема	Обратная теорема
В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны. Дано: $ABCD$ — *четырехугольник*; O — *центр окружности, вписанной в* $ABCD$. Доказать: $AB + CD = BC + AD$.	*Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.* Дано: $ABCD$ — *четырехугольник*; $AB + CD = BC + AD$. Доказать: O — *центр окружности, вписанной в* $ABCD$.

Рис. 154

Доказательство *признака описанного многоугольника* достаточно сложно, и его рекомендуется в соответствии с текстом решения задачи 724 учебника провести самому учителю.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку* ***свойства описанного четырехугольника*** *и* ***признака описанного четырехугольника****. На применение свойства* ***четырехугольника, описанного около окружности****, и признака четырехугольника, описанного около окружности, полезно предложить учащимся решить задачи 196–198. Решение задачи 197 приведено в тексте тетради, его полезно разобрать вместе с учащимися.*

4°. При введении определений *окружности, описанной около многоугольника*, и *многоугольника, вписанного в окружность*, полезно обратить внимание учащихся на то, что эти определения взаимно обратны, то есть, если в условии сказано: «*...окруж-*

ность, описанная около многоугольника...», то это означает, что задан и *многоугольник, вписанный в эту окружность*, и наоборот.

5°. Доказательство теоремы *об окружности, описанной около треугольника*, достаточно просто, поэтому его можно провести фронтально с активным привлечением учащихся с выполнением чертежа и краткой записи условия и заключения теоремы на доске (рис. 155). Или можно сформулировать теорему в виде задачи и предложить выполнить ее решение хорошо успевающему ученику:

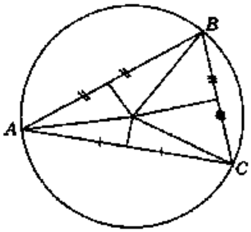


Рис. 155

Дано: ABC — треугольник;

O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Доказать: O — центр окружности, описанной около ΔABC.

В теореме об окружности, описанной около треугольника, фактически доказывается, что центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

После доказательства теоремы об окружности, описанной около треугольника, полезно обратить внимание учащихся на тот факт, что центр *описанной около треугольника окружности* (точка O) равноудален от вершин этого треугольника, то есть $OA = OB = OC$ (рис. 155).

Замечание о том, что около треугольника *можно описать только одну окружность*, можно предложить учащимся самостоятельно разобрать по тексту учебника, заметив, что доказательные рассуждения проводятся от противного.

После доказательства теоремы об *окружности, описанной около треугольника*, следует в ходе решения нижеприведенных задач исследовать вопрос о положении центра описанной окружности. Решение второй задачи поможет при решении задачи 707 из учебника, а решение третьей задачи — 706.

1. Объясните, как расположен центр описанной около треугольника окружности, если его углы относятся:
а) как 1 : 2 : 3; б) как 3 : 4 : 5; в) как 1 : 1 : 4.
2. Докажите, что центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, лежит на медиане, проведенной к основанию.
3. Докажите, что в равностороннем треугольнике высота треугольника равна трем радиусам вписанной окружности.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы* об окружности, описанной около треугольника, *и определения* окружности, описанной около многоугольника *и* многоугольника, вписанного в окружность. *Выполнить задачи 199–202.*

6°. Свойство *четырехугольника, вписанного в окружность,* можно предложить учащимся в качестве задачи.

На прямое применение свойства *четырехугольника, вписанного в окружность,* можно решить задачу 709.

После рассмотрения свойства *четырехугольника, вписанного в окружность,* следует предложить учащимся сформулировать признак *четырехугольника, вписанного в окружность.* После этого необходимо подчеркнуть, что свойство и признак *четырехугольника, вписанного в окружность,* являются обратными теоремами. Полезно выполнить на доске краткую запись условия и заключения обеих теорем (рис. 156).

Прямая теорема	Обратная теорема
В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Дано: *ABCD* — *четырехугольник;* *O — центр окружности,* <u>*описанной* около *ABCD.*</u> Доказать: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.	*Если сумма противоположных углов четырехугольника равна* 180°, *то около него можно описать окружность.* Дано: *ABCD* — *четырехугольник;* <u>$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.</u> Доказать: *O — центр окружности, описанной около ABCD.*

Рис. 156

Доказательство *признака описанного многоугольника* достаточно сложно, и его рекомендуется в соответствии с текстом решения задачи 729 учебника провести самому учителю.

На прямое применение признака *четырехугольника, описанного около окружности,* можно решить задачу 708.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировки* свойства вписанного четырехугольника *и* признака вписанного четырехугольника.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке: в классе — рассмотреть определение вписанной окружности, теорему о вписанной в треугольник окружности и три замечания к теореме, решить задачи 689, 690, 694 и 701; дома — вопросы 21 и 22 из вопросов для повторения к главе VIII, задачи 691, 692 и 693 а) и б).

На втором уроке: в классе — рассмотреть свойство и признак описанного четырехугольника, решить задачи 695–697, дома — вопрос 23 из вопросов для повторения к главе VIII, задачи 698–700.

На третьем уроке: в классе — рассмотреть определение описанной окружности, теорему об описанной около треугольника окружности и замечание к теореме, решить задачи 704, 706 и 707 из учебника; дома — вопросы 24 и 25 из вопросов для повторения к главе VIII, задачи 702, 703 и 705.

На четвертом уроке: в классе — рассмотреть свойство и признак вписанного в окружность четырехугольника, решить задачи 708, 709; дома — вопрос 26 из вопросов для повторения к главе VIII, задачи 710, 711.

Указания к задачам

Решение задачи 692 следует непосредственно из рисунка 157. В треугольнике ABC: отрезки AO, BO и CO — биссектрисы углов, а O — точка их пересечения, центр вписанной окружности.

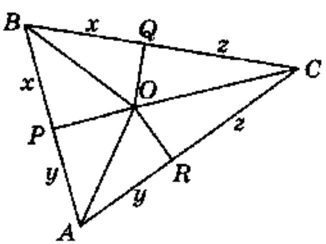


Рис. 157

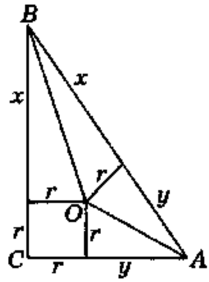


Рис. 158

По свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности, следует равенство отрезков $BQ = BP = x$, $AP = AR = y$ и $CR = CQ = z$.

Отсюда: $\begin{cases} x+y=10 \\ x+z=12 \\ y+z=5 \end{cases}$.

Решения задач 693 и 694 аналогичны решению задачи 692 и следуют непосредственно из рисунка 158. После доказательства равенства соответствующих отрезков (см. рис. 158) и применения теоремы Пифагора получаем системы уравнений:

для задачи 693 а) $\begin{cases} x+y=26 \\ (x+4)^2+(y+4)^2=26^2 \end{cases}$; для задачи 694 $\begin{cases} x+y=c \\ x+y+2r=m \end{cases}$.

Решение задачи 696 следует из сопоставления двух геометрических фактов: противоположные стороны параллелограмма равны и суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны. Значит, у такого параллелограмма все стороны равны, следовательно, данный параллелограмм — ромб.

Решение задачи 697 следует непосредственно из рисунка 159. Рассмотрим треугольник A_1OA_2. Его площадь равна $\frac{1}{2}a_1r$, где a_1 — основание, а r — высота. Так как окружность с центром в точке O — вписанная, то ее радиус перпендикулярен стороне многоугольника. Отсюда $S = S_{A_1OA_2} + S_{A_2OA_3} + S_{A_3OA_4} \ldots + S_{A_nOA_1}$, значит, $S = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2r + \frac{1}{2}a_3r \ldots + \frac{1}{2}a_nr = \frac{1}{2}r(a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n) = \frac{1}{2}rP$.

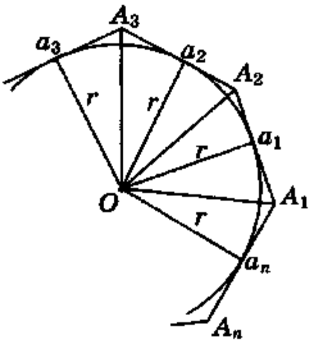


Рис. 159

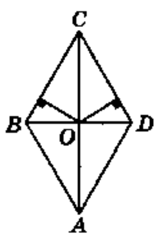


Рис. 160

Задача 700. Треугольники ABO, ADO, CBO и CDO — прямоугольные треугольники, так как $ABCD$ — ромб, они равны по гипотенузе и катету. Следовательно, и высоты, проведенные из вершин прямых углов, равны. Значит, основания высот лежат на окружности с центром в точке O. Так как высоты, проведенные из вершин прямых углов, равны и перпендикулярны сторонам ромба, то окружность с центром O — точкой пересечения диагоналей ромба и радиусом, равным расстоянию от точки O до стороны ромба, касается сторон ромба. Значит, в ромб можно вписать окружность (рис. 160).

При решении задачи 704 для доказательства пункта а) воспользоваться теоремой об описанной окружности. При решении пункта б) следует воспользоваться результатом, доказанным в пункте а), что определяет гипотенузу данного треугольника, а затем найти катеты прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу.

Решение задачи 709 следует из сопоставления двух геометрических фактов: противоположные углы параллелограмма равны и сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°. Значит, у такого параллелограмма все углы равны 90°, следовательно, данный параллелограмм — прямоугольник.

Дополнительные задачи

1. Найдите углы треугольника, если из центра описанной окружности его стороны видны под углами 100°, 120° и 140°.

2. Определите вид треугольника, если центр вписанной в него окружности совпадает с центром описанной около него окружности.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Окружность»

Комментарий для учителя

1°. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Окружность» учащиеся должны:

- изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках вписанные и описанные окружности, касательные к окружности, центральные и вписанные углы;
- выделять в конфигурации, данной в условии задачи: вписанные и описанные окружности, касательные к окружности, центральные и вписанные углы;
- устанавливать взаимное расположение прямой и окружности;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ определения вписанных и описанных окружностей, касательных к окружности, центральных и вписанных углов;
  - ➢ свойства биссектрисы угла, серединного перпендикуляра к отрезку и следствия из них;
  - ➢ теорему о вписанном угле и следствия из нее;
  - ➢ свойство точки пересечения медиан, биссектрис, высот треугольника, серединных перпендикуляров к отрезку;
  - ➢ теорему о свойствах отрезков пересекающихся хорд окружности;

- формулу площади треугольника через радиус вписанной окружности;
- алгебраический аппарат.

2°. Подготовку к контрольной работе по теме «Окружность» полезно организовать как урок решения задач. При подготовке к итоговой контрольной работе следует провести повторение, используя весь оставшийся резерв времени, оставив один урок для разбора решений итоговой работы. Задания для повторения можно брать из учебника, используя либо не решенные в процессе обучения, либо наиболее важные задания каждой темы. Кроме того, учитель может создать свой набор задач для повторения в зависимости от уровня подготовки класса.

В сборнике тестов Т.М. Мищенко, А.Д. Блинкова «Геометрия. Тесты. 8 класс» к учебнику Л.С. Атанасяна и др. издательства «Просвещение» для главы VIII «Окружность» рекомендованы тесты 12 и 13, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении данной темы. Каждый тест имеет четыре варианта.

Повторение можно организовать несколькими способами.

Первый способ: итоговый тест по теме можно создать из тестов 12 и 13, используя часть заданий из каждого теста. Следует заметить, что в зависимости от уровня подготовки класса можно использовать более легкие задания тестов или более сложные. Полезно разобрать хотя бы одну из десятых задач как теста 12, так и теста 13, решения которых позволяют определить уровень сформированности умения применять изученные теоремы и требуют достаточно высокой вычислительной культуры.

Второй способ: так как тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно из каждого теста выполнить по одному варианту устно.

Первый способ более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся.

3°. В контрольной работе первые четыре задачи — это задачи с выбором ответа и с кратким ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись при решении этих задач не следует. В задаче 5 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

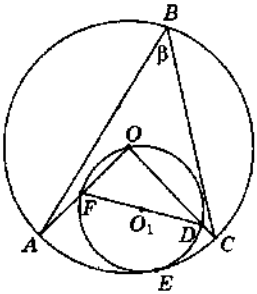
При использовании в учебном процессе рабочей тетради ее можно использовать как конспект темы и просмотреть решение опорных задач. Поскольку в рабочей тетради по каждому пункту темы дано избыточное число задач, то из не решенных в процессе изучения темы задач можно сделать подборку для урока повторения.

Контрольная работа по теме «Окружность»

1-й вариант

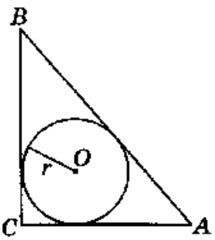
1. Определите вид треугольника, если точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам лежит вне треугольника.

1. *Прямоугольный.*
2. *Остроугольный.*
3. *Тупоугольный.*
4. *Определить невозможно.*



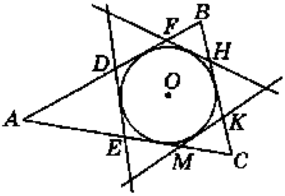
2. Две окружности касаются внутренним образом в точке E. Окружность с центром в точке O_1 проходит через центр второй окружности — точку O. Используя данные рисунка, найдите градусную меру угла β.

Ответ: ______________________



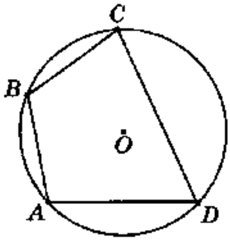
3. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см.

Ответ: ______________________



4. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные, которые отсекли от треугольника ABC треугольники DAE, FBH и KCM. Периметры треугольников DAE, FBH и KCM соответственно равны 18, 5 и 6 см. Найдите периметр треугольника ABC.

Ответ: ____________________



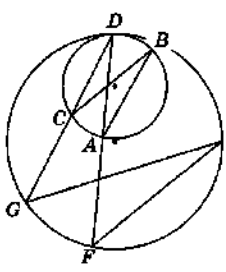
5. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности и разбивают ее на четыре дуги. Градусные меры трех из этих дуг, идущих подряд, относятся как $3 : 7 : 6$. Найдите меньший угол четырехугольника.

Ответ: ____________________

2-й вариант

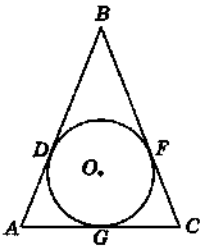
1. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке D. Определите вид треугольника ABC, если точка D равноудалена от вершин треугольника.

1. *Прямоугольный.*
2. *Остроугольный.*
3. *Тупоугольный.*
4. *Определить невозможно.*



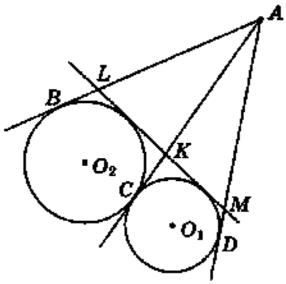
2. Две окружности касаются внутренним образом в точке D. $\angle CBA = 37°$. Найдите градусную меру угла GEF.

Ответ: ____________________



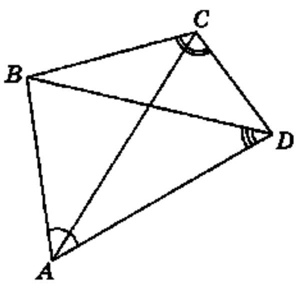
3. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 6 см и высотой 4 см.

Ответ: ______________________



4. Из одной точки A к двум касающимся внешним образом окружностям с центрами в точках O_1, и O_2 проведены три касательные: AB, AC и AD, причем одна из них проходит через точку касания окружностей C. К окружностям проведена общая касательная LM. Найдите периметр треугольника ABC, если $AB = 19$ см, $CK = 4$ см.

Ответ: ______________________



5. В четырехугольнике $ABCD$ угол BAD равен 80°, угол BCD равен 100° и угол ADB равен 35°. Найдите угол ACD.

Ответ: ______________________

ГЛАВА IX. ВЕКТОРЫ (8 ч)

Федеральная программа по математике не предполагает такого углубленного изучения темы «Векторы», как это представлено в учебнике. Содержание темы «Векторы» в курсе геометрии примерной программой ограничено знакомством учащихся с понятием вектора и операциями над ними. Практически все содержание темы сосредоточено в этой главе, исключение составляет изучение темы «скалярное произведение векторов», в которой продолжается изучение векторов и операций над ними. Основной целью изучения векторов в данном курсе является знакомство учащихся с одним из эффективных методов геометрии — векторным методом решения задач. Понятие *«вектор»* вводится на основе естественного и наглядного представления о направленном отрезке. При этом основное внимание следует уделить формированию у учащихся умений выполнять действия над векторами в геометрической и координатной формах. Кроме того, изучение векторов в некоторой степени должно удовлетворить потребности курса физики. В ходе изучения темы «Векторы» основное внимание следует уделить теореме о средней линии трапеции.

Задачный материал в основном направлен на непосредственное закрепление введенных понятий и их свойств и законов. Многие из этих задач решаются чисто аналитически, однако полезно проиллюстрировать их решения на рисунке.

Планируемые итоговые результаты изучения главы IX:

Учащиеся должны научиться:

- изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках векторы, среднюю линию трапеции;
- выделять в конфигурации, данной в условии задачи, *«сонаправленные векторы»*; *«противоположно направленные векторы»*; *«равные векторы»*, среднюю линию трапеции;
- объяснять понятия *«вектор»*; *«сонаправленные векторы»*; *«противоположно направленные векторы»*; *«равные векторы»*;
- объяснять, как строить сумму нескольких векторов;
- формулировать определение средней линии трапеции;
- объяснять правила сложения векторов: правило треугольника и правило параллелограмма;

- оперировать векторами: находить сумму и разность двух векторов, заданных геометрически, находить вектор, равный произведению заданного вектора на число;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать законы сложения и вычитания векторов;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать свойства умножения вектора на число;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему о средней линии трапеции;
- применять при решении задач на нахождение суммы и разности векторов сочетательный и переместительный законы;
- применять при решении задач на нахождение произведения вектора на число свойства сочетательного, первого и второго распределительных законов;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ законы сложения и вычитания векторов;
  - ➢ свойства умножения вектора на число;
  - ➢ теорему о средней линии трапеции;
  - ➢ алгебраический аппарат.

Учащиеся получат возможность научиться:

♦ *применять векторный метод при решении задач на вычисления и доказательства.*

§1. Понятие вектора (1 ч)

Комментарий для учителя

Понятие «*вектор*» вводится на основе естественного и наглядного представления о направленном отрезке. При введении данного понятия следует напомнить учащимся, что в курсе физики рассматривались векторные величины — перемещение тела и скорость, характеризуемые не только числом, но и направлением. Понятие вектора вводится на наглядном уровне: «*Направленный отрезок называется вектором*», рассматриваются две основные характеристики вектора — его *длина* и *направление*, определяется равенство векторов.

Текущие результаты изучения §1. Учащиеся должны научиться:

- изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках векторы, сонаправленные векторы, противоположно направленные векторы, равные векторы;
- выделять в конфигурации, данной в условии задачи, сонаправленные векторы; противоположно направленные векторы; равные векторы;
- объяснять понятия *«вектор»*; *«сонаправленные векторы»*; *«противоположно направленные векторы»*; *«равные векторы»*;
- откладывать от любой точки вектор, равный данному;
- применять при решении задач определения: вектор; длина (модуль) вектора, равные векторы, сонаправленные векторы; противоположно направленные векторы; равные векторы.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Объяснение материала удобно организовать в форме беседы через систему упражнений. После выполнения каждого из них или в процессе решения формулируются определения, вводится новая терминология, объясняются правила.

Формулировка: «*Направленный отрезок называется вектором*» — опирается на рисунок 241 из пункта 76 учебника. Одновременно с определением вектора вводятся и соответствующие его обозначения.

На закрепление определения *вектора* можно выполнить следующие упражнения:

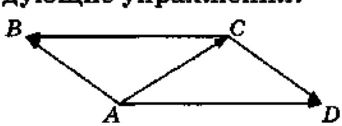


Рис. 161

1. Запишите все векторы, изображенные на рисунке 161.
2. На рисунке 161 изобразите векторы $\overline{DA}$, $\overline{DB}$.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся сделать необходимые рисунки и записать определения вектора и нулевого вектора, а затем выполнить задания 206 и 207[1].

2°. После введения определения *длины* (*модуля*) *вектора*, на формирование умения <u>*применять*</u> его можно предложить учащимся выполнить устно по готовому чертежу упражнение:

[1] Упражнения, предлагаемые в рабочей тетради, как правило, совпадают с задачами, рекомендованными в данном методическом пособии.

В прямоугольнике $ABCD$ стороны AB и AD соответственно равны 8 см и 15 см. Определите, чему равны абсолютные величины векторов $\overline{DA}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ (рис. 162).

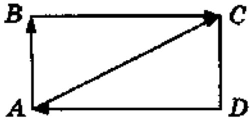


Рис. 162

В рабочей тетради следует предложить учащимся записать определение длины вектора. А затем выполнить задание 208.

3°. При введении определения *сонаправленных* и *противоположно направленных векторов* сначала вводится понятие *коллинеарных векторов*. При этом следует обратить внимание учащихся на то, что *коллинеарные векторы* лежат на параллельных прямых или на одной и той же прямой. На проверку правильности усвоения понятия *коллинеарных векторов* полезно выполнить устно упражнение 747 из учебника.

Определение *сонаправленных векторов* и *противоположно направленных векторов* полезно сопроводить упражнением на распознавание, которое следует выполнить устно по готовому чертежу:

Четырехугольник $ABCD$ — трапеция. Используя обозначения, данные на рисунке **163**, укажите:

1) пары сонаправленных векторов;

2) пары противоположно направленных векторов;

3) являются ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ сонаправленными.

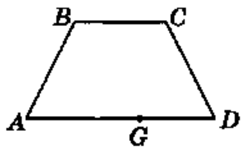


Рис. 163

При ответе на вопросы следует обсудить, почему векторы *сонаправлены* или *противоположно направлены*. При ответе на первый вопрос: векторы $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ *сонаправлены*, так как они лежат на параллельных прямых AD и BC и одинаково направлены. Векторы $\overline{AD}$, $\overline{AG}$ и $\overline{GD}$ *сонаправлены*, так как они лежат на одной прямой AD и одинаково направлены. При ответе на второй вопрос: векторы $\overline{AD}$ и $\overline{CB}$ *противоположно направлены*, так как они лежат на параллельных прямых AD и BC, но направлены в разные стороны, векторы $\overline{AD}$ и $\overline{DG}$ *противоположно направлены*, так как они лежат на одной прямой AD и противоположно

направлены. В третьем вопросе заложен контрпример: векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ не являются ни *сонаправленными*, ни *противоположно направленными*, так как не лежат ни на параллельных прямых, ни на одной прямой.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся сделать необходимые рисунки, записать определения сонаправленных и противоположно направленных векторов. А затем выполнить задание 209.*

4°. После введения определения *равенства векторов* на формирование умения *применять* его для распознавания *равных векторов* можно предложить учащимся следующее упражнение:

> Четырехугольник $ABCD$ — квадрат (рис. 164). По рисунку дайте развернутые ответы на следующие вопросы:
>
> 1. Почему в каждой из пар $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AB}$, $\overline{BO}$ и $\overline{OD}$ векторы равны?
> 2. Модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны. Почему векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ не равны?
> 3. Почему в каждой из пар $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$, $\overline{BO}$ и $\overline{OC}$ векторы не равны?
> 4. Почему в каждой из пар $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, $\overline{BO}$ и $\overline{BD}$ векторы не равны?

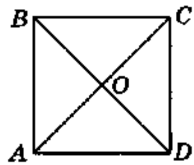


Рис. 164

5°. Описание способа откладывания от некоторой точки M вектора, равного данному вектору $\overline{AB}$ целесообразно дать в виде алгоритма по шагам:

1) через точку M провести прямую, параллельную прямой AB;

2) отложить на этой прямой от точки M отрезки MN и MN', равные отрезку AB;

3) выбрать тот отрезок, который сонаправлен с вектором $\overline{AB}$.

Этот вектор и будет искомым равным вектору $\overline{AB}$.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся записать определение* равных векторов *и выполнить задания 210 и 211. После рассмотрения способа откладывания от некоторой точки* M *вектора, равного данному, по этому алгоритму выполнить упражнение 212.*

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал параграфа 1 и решить устно задачи 744, 745 и 748, выполнить упражнение 747; дома — вопросы 1–6 из вопросов для повторения к главе IX, задачи 746, 749–752.

§2. Сложение векторов (1 ч)

Комментарий для учителя

В этом параграфе начинается изучение операций над векторами и свойств этих операций. Определение суммы двух векторов дается в геометрической форме, при этом рассматриваются два способа построения суммы двух векторов, заданных геометрически (в виде направленных отрезков): правило треугольника и правило параллелограмма. Для построения суммы нескольких векторов, заданных геометрически (в виде направленных отрезков), рассматривается правило многоугольника.

Текущие результаты изучения §2.

Учащиеся должны научиться:

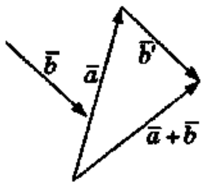
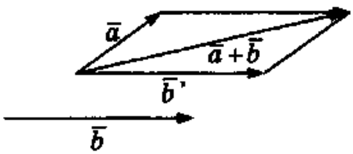
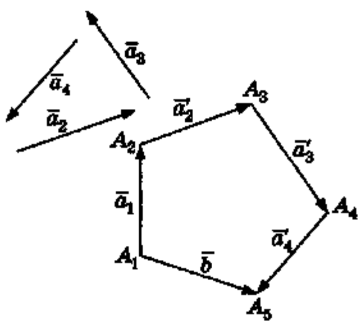
- оперировать векторами: находить сумму и разность двух векторов, заданных геометрически;
- формулировать, иллюстрировать и доказывать законы сложения и вычитания векторов;
- объяснять правила сложения векторов: правило треугольника и правило параллелограмма;
- применять при решении задач на нахождение суммы и разности векторов сочетательный и переместительный законы;
- объяснять, как строить сумму нескольких векторов;
- применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - ➢ понятия суммы и разности двух векторов;
  - ➢ понятия суммы нескольких векторов;
  - ➢ законы сложения и вычитания векторов;
  - ➢ алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. При объяснении определения *суммы векторов*, следует подчеркнуть, что эта сумма — вектор. После введения определения *суммы векторов* можно предложить упражнение 759 из учебника.

Из курса «Математики 5, 6» учащиеся знают, что для суммы чисел выполняются *сочетательный и переместительный* законы сложения. Эти же законы справедливы и для *суммы векторов*. Рассмотрение законов сложения можно провести в форме беседы.

Описание алгоритмов *построения суммы двух векторов*: правила треугольника и правила параллелограмма, и *суммы n векторов* целесообразно дать по шагам. При работе над построением суммы и разности векторов полезно использовать плакат такого типа, как на рисунке 169.

 *Рис. 165*	*Правило треугольника* (рис. 165) 1) от конца вектора $\overline{a}$ отложить вектор $\overline{b}\,'$, равный вектору $\overline{b}$; 2) провести вектор из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}\,'$. Вывод: полученный вектор и будет *суммой векторов* $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
 *Рис. 166*	*Правило параллелограмма* (рис. 166) 1) от начала вектора $\overline{a}$ отложить вектор $\overline{b}\,'$, равный вектору $\overline{b}$; 2) на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}\,'$ как на сторонах построить параллелограмм; 3) провести из общего начала векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ вектор — диагональ параллелограмма. Вывод: полученный вектор будет *суммой векторов* $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
 *Рис. 167*	*Правило многоугольника* (рис. 167) 1) от конца вектора $\overline{a}_1$ отложить вектор $\overline{a}_2'$, равный вектору $\overline{a}_2$; 2) от конца вектора $\overline{a}_2'$ отложить вектор $\overline{a}_3'$, равный вектору $\overline{a}_3$; 3) повторить откладывание векторов столько раз, сколько векторов нужно сложить; 4) провести вектор из начала вектора $\overline{a}_1$ в конец вектора $\overline{a}_n'$. Вывод: полученный вектор и будет суммой n векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, … и $\overline{a}_n$.

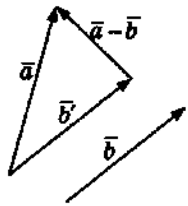
<table>
<tr>
<td>
Рис. 168</td>
<td>Разность векторов (рис. 168)
1) от начала вектора $\bar{a}$ отложить вектор $\bar{b}'$, равный вектору $\bar{b}$;
2) провести вектор из конца вектора $\bar{b}'$ в конец вектора $\bar{a}$.
<u>Вывод</u>: полученный вектор и будет разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.</td>
</tr>
</table>

Рис. 169

Следует заметить, что правило параллелограмма не применимо в случае, когда слагаемые векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых, а правило треугольника применимо и в этом случае. Можно предложить учащимся проверить эти утверждения.

После рассмотрения алгоритмов построения суммы векторов на их применение можно предложить учащимся упражнения 762 а), б), 764 а) из учебника и нижеприведенное упражнение на проверку усвоения учащимися правила сложения векторов.

Какой из пунктов: 1) или 2) рисунка 170 соответствует:
1) правилу параллелограмма сложения векторов;
2) правилу треугольника сложения векторов.

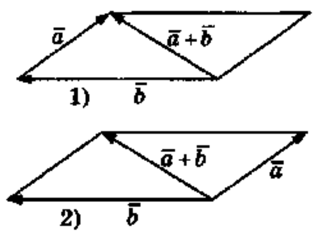


Рис. 170

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировки переместительного и сочетательного законов сложения. Затем выполнить упражнения 213 и 214.

Примерное планирование изучения материала

На уроке в <u>классе</u> — рассмотреть весь теоретический материал параграфа 2 и решить устно задачи 759, 762 а), б), 764 а), 769, разобрать по тексту учебника 767, выполнить письменно задачи 771 и 773; <u>дома</u> — вопросы 7–13 из вопросов для повторения к главе IX, задачи 760, 761, 765, 770 б), 772.

Указания к задачам

В задаче 760 нужно от конца вектора $\vec{x}$ отложить вектор $\vec{y}$ и провести вектор из начала вектора $\vec{x}$ в конец вектора $\vec{y}$, получим вектор $\vec{x} + \vec{y}$. Получили треугольник со сторонами $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ и $|\vec{x} + \vec{y}|$ в силу теоремы о неравенстве треугольника (§2 главы IV, пункт 33) $|\vec{x} + \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

Задача 772. $\overline{AB} = \overline{DC}$, так как $ABCD$ — параллелограмм.

$\overline{AB} = \overline{XB} - \overline{XA}$, $\overline{DC} = \overline{XC} - \overline{XD}$ (рис. 171), отсюда $\overline{XB} - \overline{XA} = \overline{XC} - \overline{XD}$, $\overline{XA} + \overline{XC} = \overline{XB} + \overline{XD}$.

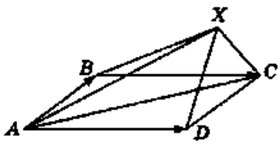


Рис. 171

В задаче 773 нужно обратить внимание учащихся на то, что в условии не указано, являются ли данные векторы коллинеарными. Поэтому следует рассмотреть два случая: первый — данные векторы коллинеарны; второй — не коллинеарны. Второй случай аналогичен решению задачи 760.

§3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач (3 ч)

Комментарий для учителя

В этом пункте вводится еще одна операция над векторами, а именно умножение вектора на число. Определение произведения вектора на число дается для векторов, заданных геометрически (в виде направленных отрезков), а затем рассматриваются свойства умножения вектора на число. При работе над этим параграфом следует сосредоточить внимание учащихся на теореме о средней линии трапеции.

Текущие результаты изучения §3. Учащиеся должны научиться:

- изображать, обозначать и распознавать на чертежах и рисунках среднюю линию трапеции;
- выделять в конфигурации, данной в условии задачи, среднюю линию трапеции;

– находить вектор, равный произведению заданного геометрически вектора на число;
– формулировать, иллюстрировать и доказывать свойства умножения вектора на число;
– формулировать, иллюстрировать и доказывать теорему о средней линии трапеции;
– применять при решении задач на нахождение произведения вектора на число сочетательный, первый и второй распределительный законы;
– применять при решении задач на вычисления и доказательство:
  - свойства умножения вектора на число;
  - теорему о средней линии трапеции;
  - алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. При объяснении определения *произведения вектора* $\overline{a}$ ($\overline{a} \neq 0$) *на число k* следует подчеркнуть, что это произведение — <u>вектор</u> $k\overline{a}$, длина которого равна $|k||\overline{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $k > 0$, и противоположно направлению вектора $\overline{a}$, если $k < 0$. После введения определения следует изложить свойства *произведения вектора на число*. Затем перейти к рассмотрению решений задач из пункта 84, но сначала на формирование наглядных представлений о векторах, полученных в результате операции *умножения вектора на число*, полезно выполнить следующее упражнение.

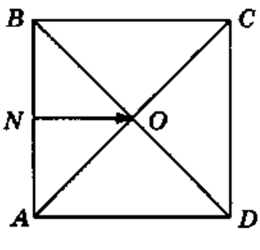


Рис. 172

Вектор $\overline{NO} = \overline{a}$ (рис. 172). В квадрате $ABCD$ выразите векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ через вектор $\overline{a}$.

В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировки определения произведения вектора на число, следствий из определения произведения вектора на число, сочетательный и два переместительных закона произведения вектора на число. Затем выполнить упражнения 215–217.

2°. При введении определения *средней линией трапеции* основное внимание необходимо направить на понимание учащимися формулировки определения. Другими словами, если в условии задачи сказано: «*отрезок MN — средняя линия трапеции ABCD* с основанием *AD*...», то учащиеся должны уметь выделить и записать в ходе решения или в краткой записи условия равные отрезки: $AM = MB$, $CN = ND$ (рис. 173).

3°. Для проверки усвоения метода доказательства возможности построения треугольника по трем данным отрезкам, примененного при решении в задаче 788, рекомендуется предложить одному из сильных учеников решить задачу 789. Перед ее решением необходимо прокомментировать рисунки, иллюстрирующие условие задачи: параллелограммы, построенные на сторонах данного треугольника, могут располагаться произвольно (рис. 181). Решение задачи дано в разделе «Указания к задачам».

Перед доказательством теоремы о *средней линии трапеции* полезно решить следующие задачи:

> 1. Докажите, что сумма сонаправленных векторов является вектором, сонаправленным им.
> 2. Докажите, что модуль суммы сонаправленных векторов равен сумме модулей сонаправленных векторов.

Для того чтобы учащиеся лучше усвоили формулировку и доказательство теоремы о *средней линии трапеции*, полезно выполнить рисунок и сделать краткую запись условия на доске (см. рис. 173):

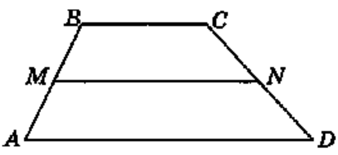


Рис. 173

Дано: $ABCD$ — трапеция;
MN — средняя линия

Доказать: $MN \parallel AD$;

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$$

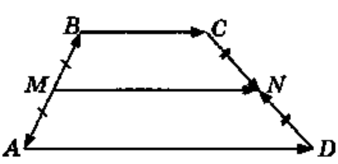


Рис. 174

Доказательство теоремы о *средней линии* трапеции достаточно просто, но, поскольку это одно из первых доказательств в новом учебном году, его полезно провести самому учителю с привлечением наиболее подготовленных учащихся.

Доказательство проводится векторным методом. Для этого необходимо задать векторы так, чтобы удобно было использовать известные операции над векторами и их свойства. Поскольку необходимо выразить $\overrightarrow{MN}$ через сумму векторов $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$, то для того, чтобы применить одно из правил сложения векторов, представим стороны трапеции и ее среднюю линию в виде векторов так, как это дано на рисунке 174. После этого в соответствии с текстом учебника, используя правило многоугольника сложения векторов, доказывается, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$. При этом следует заметить, что пока доказано только равенство вектора $\overrightarrow{MN}$ полусумме векторов $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$.

Векторы $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ лежат на параллельных прямых AD и BC (AD и BC основания трапеции) и имеют одинаковое направление по построению. Следовательно, они сонаправлены. В силу решения вышеприведенных задач $MN \parallel AD$; $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

4°. Для закрепления теоремы *о средней линии трапеции* можно предложить учащимся следующие задачи по готовому чертежу:

1. В трапеции $ABCD$ (рис. 175) стороны равны: $AB = 8$ см, $BC = 13$ см, $CD = 10$ см, $AD = 19$ см. FG — средняя линия трапеции. Найдите стороны трапеции $AFGD$.

2. В трапеции, одно из оснований которой равно 5 см, проведена средняя линия, длина которой равна 6 см (см. рис. 175). Чему равно другое основание трапеции?

3. В трапеции $ABCD$ (рис. 176) с основаниями $AD = 12$ см и $BC = 8$ см проведена средняя линия ML, которая пересекает диагональ AC в точке K. Чему равны отрезки MK и KL?

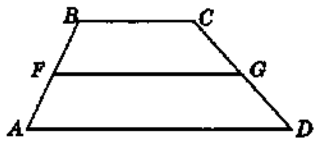


Рис. 175

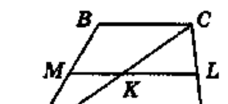


Рис. 176

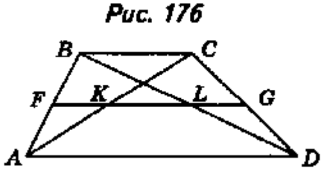


Рис. 177

4. Диагонали трапеции $ABCD$ (рис. 177) пересекают среднюю линию FG в точках K и L. Докажите, что $FK = LG$.

В рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о средней линии трапеции. *Для закрепления теоремы* о средней линии трапеции *можно предложить учащимся выполнить задачи 218–223.*

5°. На третьем уроке рекомендуется часть урока посвятить повторению: повторить теоретический материал главы IX в ходе решения задач и провести самостоятельную работу. При выборе задач для решения на этом уроке целесообразно использовать задачи из списков задач, рекомендованных к параграфам данной главы, но не решенных в ходе изучения темы. При этом полезно рассмотреть задачи, включающие в себя несколько действий над векторами в геометрической форме, и геометрические задачи, решаемые с помощью векторов.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пунктов 86 и 87; решить задачи 779, 781 в), 785 и 786; дома — вопросы 14–18 из вопросов для повторения к главе IX, задачи 780, 781 а) и б), 787, разобрать по тексту учебника решение задачи 788.

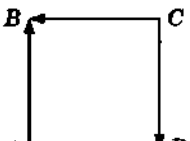
На втором уроке в классе — рассмотреть весь теоретический материал пункта 88; решить задачи 789, 794, 795, 797 и 799; дома — вопросы 19 и 20 из вопросов для повторения к главе IX, задачи 790, 791, 793, 798.

На третьем уроке в классе — повторить теоретический материал главы IX в ходе решения задач; провести самостоятельную работу.

Самостоятельная работа по теме «Векторы»

Самостоятельная работа планируется на 15 мин.

1-й вариант

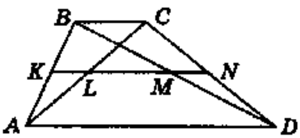


1. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат. Среди данных векторов укажите одну пару равных векторов.

Ответ: ______________________

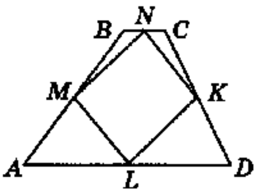
2. Даны три коллинеарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Известно, что $3\overline{a} - \overline{b} + 0{,}5\overline{c} = 0$ и $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{c}| = 2$. Найдите $|\overline{b}|$, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$ противоположно направлены.

Ответ: ______________________



3. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 22$ см и $BC = 8$ см проведена средняя линия KN, которая пересекает диагонали AC и BD в точках L и M соответственно. Определите длину отрезка LM.

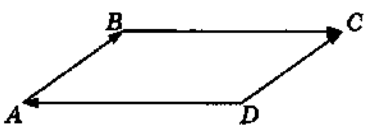
Ответ: 1) 11 см; 2) 15 см; 3) 7 см; 4) 8 см.



4. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Середины сторон трапеции являются вершинами четырехугольника $KLMN$. Найдите диагональ NL этого четырехугольника, если основания трапеции равны 14 см и 6 см.

Ответ: ______________________

2-й вариант

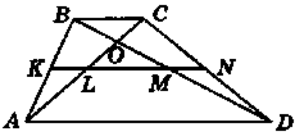


1. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Среди данных векторов укажите пару противоположно направленных векторов.

Ответ: ______________________

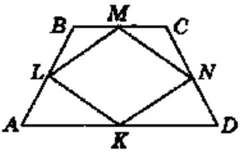
2. Даны три коллинеарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Известно, что $0{,}5\overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c} = 0$ и $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$. Найдите $|\overline{c}|$, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ противоположно направлены.

Ответ: ______________________



3. Диагонали трапеции $ABCD$ делят ее среднюю линию KN на три отрезка. Отрезки KL и LM равны 6 см и 8 см соответственно. Найдите меньшее основание трапеции.

Ответ: 1) 16 см; 2) 14 см; 3) 12 см; 4) 28 см.



4. В равнобедренную трапецию $ABCD$ вписан четырехугольник $KLMN$ так, что его стороны MN и KL параллельны диагонали BD. Вершина M четырехугольника является серединой основания BC, а вершина K — серединой основания AD. Найдите диагональ LN четырехугольника $KLMN$, если основания трапеции $ABCD$ равны 13 см и 3 см.

Ответ: ______________________________

Указания к задачам

Задача 785. По правилу многоугольника сложения векторов $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN}$ (рис. 178). По условию $\overline{MA} = \frac{1}{2}\overline{CA}$, $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BD}$. Отсюда $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$.

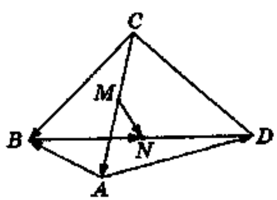


Рис. 178

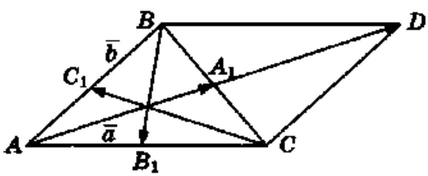


Рис. 179

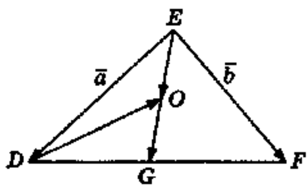


Рис. 180

Задача 786. По правилу параллелограмма сложения векторов $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)$, так как A_1 — середина стороны BC, то AA_1 — половина диагонали AD параллелограмма $ABCD$ (рис.179). По определению разности векторов $\overline{BB_1} = \overline{AB_1} - \overline{AB}$ и $\overline{CC_1} = \overline{AC_1} - \overline{AC}$. Следовательно, $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}\left(\bar{a}+\bar{b}\right)$, $\overline{BB_1} = \frac{1}{2}\bar{a} - \bar{b}$, $\overline{AC_1} = \frac{1}{2}\bar{b} - \bar{a}$.

Задача 787. В силу решения задачи 786 $\overline{EG} = \frac{1}{2}\left(\overline{ED}+\overline{EF}\right)$. По определению разности векторов $\overline{DO} = \frac{1}{2}\overline{EG} - \overline{ED} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b}) - \bar{a} = \frac{1}{4}\bar{b} - \frac{3}{4}\bar{a}$ (рис. 180).

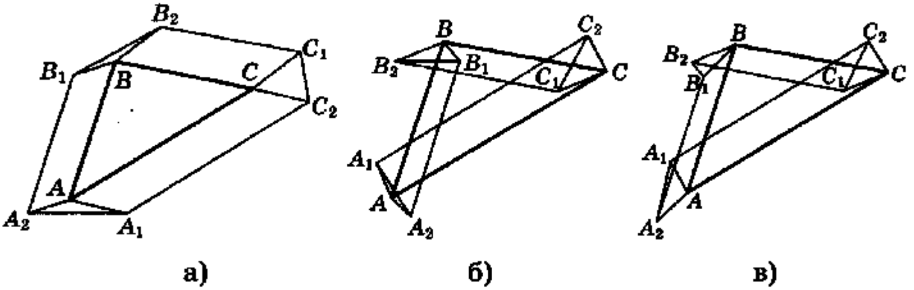


Рис. 181

Задача 789. В условии задачи не указано, каким способом построены на сторонах треугольника параллелограммы. Они могут быть построены вне треугольника (рис. 181, а), вовнутрь треугольника (рис. 181, б). И, наконец, часть параллелограммов построена вне треугольника, а часть — вовнутрь треугольника (рис. 181, в). Однако, и это важно подчеркнуть, решение не зависит от расположения параллелограммов. Задача решается векторным методом.

Введем векторы $\overline{A_1A}$, $\overline{AA_2}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B}$, $\overline{BB_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C}$, $\overline{CC_2}$, $\overline{C_1C_2}$. Из решения задачи 788 следует, что если сумма векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ по правилу многоугольника будет равна нулевому вектору, то, построив сумму векторов, равных данным, получим треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2. При этом необходимо, чтобы векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ не были сонаправлены.

По правилу треугольника сложения векторов:

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1A} + \overline{AA_2};\ \overline{B_1B_2} = \overline{B_1B} + \overline{BB_2};\ \overline{C_1C_2} = \overline{C_1C} + \overline{CC_2}. \qquad (1)$$

Заметим, что $\overline{A_1A} + \overline{CC_2} = \overline{0}$, так как эти векторы равны по модулю (стороны параллелограмма ACC_2A_1) и противоположно направлены. Аналогично: $\overline{B_1B} + \overline{AA_2} = \overline{0}$ и $\overline{C_1C} + \overline{BB_2} = \overline{0}$. Сложим равенства (1) и получим $\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = \overline{0}$.

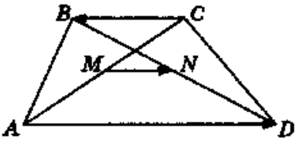


Рис. 182

<u>Задача 790</u>. Введем векторы $\overline{MN}$, $\overline{CB}$, $\overline{AD}$ (рис. 182). В силу решения задачи 785 $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$. Векторы $\overline{AD}$ и $\overline{CB}$ лежат на параллельных прямых AD и BC (AD и BC — основания трапеции, для определенности — $AD > BC$) и имеют противоположное направление по построению. Отсюда вектор $\overline{MN}$ коллинеарен векторам $\overline{CB}$ и $\overline{AD}$. Следовательно, $MN \parallel AD$ и $MN \parallel BC$ и $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

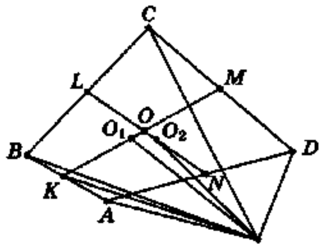


Рис. 183

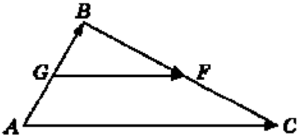


Рис. 184

<u>Задача 791</u>. Возьмем произвольную точку X и найдем расстояние от нее до середин O_1 и O_2 отрезков KM и LN (рис. 183). Задача решается векторным методом. Введем векторы $\overline{XA}$; $\overline{XB}$; $\overline{XC}$; $\overline{XD}$; $\overline{XK}$; $\overline{XL}$; $\overline{XM}$; $\overline{XN}$; $\overline{XO_1}$ и $\overline{XO_2}$. Так как XM — медиана треугольника CXD, то $\overline{XM} = \frac{1}{2}\left(\overline{XC} + \overline{XD}\right)$. Для медианы XK треугольника AXB выкладки аналогичны. В треугольнике KXM отрезок XO_1 является медианой.

Значит, $\overline{XO_1} = \frac{1}{2}\left(\overline{XK} + \overline{XM}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD})$. Аналогично, $\overline{XO_2} = \frac{1}{2}(\overline{XL} + \overline{XN}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD})$.

Отсюда $\overline{XO_1} = \overline{XO_2}$, следовательно, точки O_1 и O_2 совпадают.

Задача 792. Из треугольника FBG по правилу сложения векторов $\overline{FG} = \overline{FB} + \overline{BG}$ (рис. 184). Так как точки F и G являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, то $\overline{FG} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}$, следовательно, $FG \parallel AC$ и $FG = \frac{1}{2}AC$.

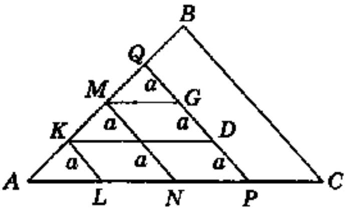


Рис. 185

Основную сложность в решении задачи 794 вызывает построение чертежа по вербальному описанию условия задачи и особенно дополнительные построения (рис. 185). Поэтому эту задачу рекомендуется решить в классе. Выполнение чертежа следует прокомментировать учителю: в трапеции $KQPL$ отрезок MN является средней линией. Проводим прямые KD и MG, параллельные AC. Точка G — середина отрезка QD (по теореме Фалеса). Далее решение видно из чертежа.

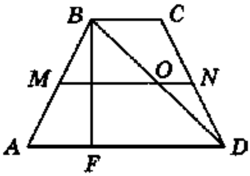


Рис. 186

Задача 798. Диагональ BD трапеции $ABCD$ (рис. 186) делит ее среднюю линию MN на два отрезка MO и ON, каждый из которых в силу задачи 797 является средней линией соответствующего треугольника. Отсюда основания трапеции $AD = 70$ см и $BC = 22$ см.

Следовательно, $AF = 24$ см. Из прямоугольного треугольника BFA получаем $\angle ABF = 30°$, $\angle BAF = 60°$. Углы равнобедренной трапеции равны 60° и 120°.

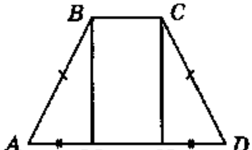


Рис. 187

Задача 799. Так как трапеция — равнобедренная, то $AM = ND$ и $BC = MN$ (рис. 187). Средняя линия трапеция равна $\frac{1}{2}(BC + AD)$ или $\frac{1}{2}(BC + AM + MN + ND)$. По условию $MN + ND$ равно 7 см. Следовательно, средняя линия трапеции равна 7 см.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Глава V. Четырехугольники (12 ч)

1.	Многоугольники	2 ч
2.	Параллелограмм и трапеция	4 ч
3.	Прямоугольник, ромб, квадрат	3 ч
4.	Систематизация и обобщение знаний	1 ч
5.	Контрольная работа	1 ч
6.	Резерв	1 ч

Глава VI. Площадь (14 ч)

1.	Площадь многоугольника	1 ч
2.	Площади параллелограмма, треугольника и трапеции	5 ч
3.	Теорема Пифагора	3 ч
4.	Систематизация и обобщение знаний	1 ч
5.	Контрольная работа	1 ч
6.	Резерв	3 ч

Глава VII. Подобные треугольники (16 ч)

1.	Определение подобных треугольников	2 ч
2.	Признаки подобия треугольников	4 ч
3.	Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	4 ч
4.	Соотношения между сторонами и углами треугольника	2 ч
5.	Систематизация и обобщение знаний	1 ч
6.	Контрольная работа	1 ч
7.	Резерв	2 ч

Глава VIII. Окружность (14 ч)

1.	Касательная к окружности	2 ч
2.	Центральные и вписанные углы	3 ч
3.	Четыре замечательные точки треугольника	2 ч
4.	Вписанная и описанная окружности	4 ч

5.	Систематизация и обобщение знаний	1 ч
6.	Контрольная работа	1 ч
7.	Резерв	1 ч

Глава IX. Векторы (8 ч)

1.	Понятие вектора	1 ч
2.	Сложение и вычитание векторов	1 ч
3.	Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач	3 ч
4.	Систематизация и обобщение знаний	1 ч
5.	Контрольная работа	1 ч
6.	Резерв	1 ч

Заключительное повторение (4 ч)

	Систематизация и обобщение знаний	2 ч
	Контрольная работа	1 ч
	Подведение итогов	1 ч

Учебное издание

Мищенко Татьяна Михайловна

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

8 класс

к учебнику Л. С. Атанасяна и др.
«Геометрия. 7–9 классы»

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. AE51. Н 16678 от 20.05.2015 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *И. Д. Баринская, Н. Е. Жданова*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *А. В. Толокевич*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры,
литература учебная

Отпечатано в полном соответствии с предоставленными материалами
в типографии ООО «Чеховский печатник».
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.
Тел.: +7 915 222 15 42, +7 926 063 81 80.